

ENSI-MP

Mathématiques 1

François Saint Pierre

I. convergence uniforme dans $C([0, 1], \mathbf{R})$

1. Pour tout x de $[0, 1]$ $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy donc convergente car $\mathbf{R}$ est complet. $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a donc une limite simple.

2. Soit $\varepsilon > 0$ pour $n \geq N(\varepsilon)$ et $p \geq N(\varepsilon)$ on a $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x de $[0, 1]$. par continuité de $\| \cdot \|$ on obtient par passage à la limite pour p : $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Donc $|f(x)| \leq \varepsilon + f_n(x) \leq \varepsilon + N_\infty(f_n)$. $N_\infty(f_n)$ existe car f_n est continue sur le compact $[0, 1]$.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ justifie } N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Une limite uniforme d'applications continues est continue donc $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$.

Toute suite de Cauchy dans $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$ est convergente donc c'est un espace de Banach.

4. $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers u

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 & x \in [0, 1[\\ u(1) &= e \end{aligned}$$

u n'est pas continue donc $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne peut être de Cauchy (cf 3).

5. $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers $\int_0^x 1 dt$. (la valeur en 1 ne modifie pas l'intégrale).

$N_\infty(\int_0^x (e^{t^n} - 1) dt)$ tend vers 0 avec n donc on a la convergence uniforme.

(On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que l'on a une suite de Cauchy en utilisant la convergence simple vers u .)

II. Théorème du point fixe de Banach.

1. $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|$. Donc $(1 - \alpha) \|x - y\| \leq 0$ avec $1 - \alpha > 0$. donc $\|x - y\| = 0$ et $x = y$.

2.1 Dans tous les livres....

2.2 $\alpha \in [0, 1[$ on obtient donc une série géométrique convergente:

$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|a_1 - a_0\|$ qui prouve que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy donc convergente vers l dans E (Banach) et l est dans $\overline{A}$.

De plus A est fermé $\overline{A} = A$ donc la limite est dans A .

2.3 T continue donc, $T(a_n) \rightarrow T(l)$, $T(a_n) = a_{n+1}$ $(a_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est une sous suite de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donc converge aussi vers l . On a donc en passant à la limite: $T(l) = l$. Cette limite est unique d'après 2.1.

3.1 $U = I + T$ est continue comme somme de fonctions continues (T est lipchitzienne).

Soit $y \in E$ $U(x) = y$ ssi $x = y - T(x)$. Or T_y définie par $T_y(x) = y - T(x)$ est contractante car $\|T_y(x) - T_y(z)\| = \|T(z) - T(x)\| \leq \|x - z\|$ donc d'après II.2 T_y possède un point fixe unique donc U est bijective. (remarque directement l'injectivité est triviale mais pas la surjectivité.....).

3.2 On pose $(U^{-1}(x), U^{-1}(y)) = (a, b)$, $a + T(a) = x$ $b + T(b) = y$.
 $x - y = a - b - (T(b) - T(a))$ donc $\|x - y\| = \|a - b - (T(b) - T(a))\| \geq$
 $\|a - b\| - \|T(a) - T(b)\|$
Or $\|T(a) - T(b)\| \leq \alpha \|a - b\|$ comme $\alpha \in [0, 1[$
 $\|x - y\| \geq \|a - b\| - \|T(a) - T(b)\| \geq (1 - \alpha) \|a - b\|$
Donc $\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|x - y\|$

4.1 $\|V(x - y)\| = \|V(x) - V(y)\| \leq \|V\| \cdot \|x - y\|$ Par linéarité de V et par propriété des normes subordonnées. Donc comme $\|V\| \in [0, 1[$, V est contractante.

4.2 $y = (I + V_n)(x_n) = (I + V)(x)$ donc $x_n - x = V(x) - V_n(x_n) = V(x) - V_n(x) + V_n(x - x_n)$.

On a donc $(I + V_n)(x_n - x) = (V - V_n)(x)$ et $(x_n - x) = (I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)$.
 $\|x_n - x\| = \|(I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)\| \leq (I - \|V_n\|)^{-1} \|V - V_n\| \|x\|$. (II.3.2 II.4.1)

Comme $\|V - V_n\| \rightarrow 0$ et $(I - \|V_n\|)^{-1}$ est borné ($(I - \|V_n\|)^{-1} \rightarrow (I - \|V\|)^{-1}$ et $\|V_n\| < 1$).

Bilan $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0, 1], \mathbf{R})$.

1. découle directement du théorème des accroissements finis.

2.1 $y \rightarrow (x, y, u(y))$ est continue car ses composantes le sont et φ est continue donc l'application composée est continue.

2.2 $y \rightarrow \varphi(x, y, u(y))$ est continue sur $[0, 1]$ ce qui permet de définir T_φ
 $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y, u(y))$ est aussi continue sur $[0, 1]^2$ (même démarche qu'au 2.1) on peut donc utiliser le théorème de continuité sous le signe $\int$.

2.3 Pour $(u_1, u_2) \in (C([0, 1], \mathbf{R}))^2$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
|(T_\varphi(u_1))(x) - (T_\varphi(u_2))(x)| &= \left| \int_0^1 (\varphi(x, y, u_1(y)) - \varphi(x, y, u_2(y))) dy \right| \\
|T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2))(x)| &\leq \int_0^1 |\varphi(x, y, u_1(y)) - \varphi(x, y, u_2(y))| dy \leq \int_0^1 r |u_1(y) - u_2(y)| dy \\
\text{Donc pour tout } x & |(T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2)))(x)| \leq \int_0^1 r N_\infty(u_1 - u_2) dy = r N_\infty(u_1 - u_2) \\
\text{D'où pour tout } (u_1, u_2) &\in (C([0, 1], \mathbf{R}))^2 : N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq r N_\infty(u_1 - u_2)
\end{aligned}$$

2.4 D'après 2.3 pour $\lambda \in \mathbf{R}$ $N_\infty(\lambda T_\varphi(u_1) - \lambda T_\varphi(u_2)) = |\lambda| N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq |\lambda| N_\infty(u_1 - u_2)$

Pour $\lambda \in]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}[$ on a $|\lambda| r < 1$ et λT_φ est une contraction du Banach $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$. donc d'après II.3 $S_{(\varphi, \lambda)}$ est un homéomorphisme de $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$ dans lui même.

3.1 $(x, y, z) \rightarrow \mu(x, y)z$ est continue. Sur le compact $[0, 1]^2$ μ est continue donc on peut poser $r = N_\infty(\mu)$. On a $|\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z')| = |\mu(x, y)| |z - z'| \leq r |z - z'|$ μ est donc de type U.

La linéarité de $\int$ justifie celle de T_φ donc d'après 2.4 pour $\lambda \in]-\frac{1}{N_\infty(\mu)}, \frac{1}{N_\infty(\mu)}[$ on a $S_{(\varphi, \lambda)}$ est un isomorphisme de $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$ dans lui même.

3.2 Soit $u \in C([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $N_\infty(u) \leq 1$. Pour $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u)))(x)| &= \left| \int_0^1 (\mu_n(x, y) - \mu(x, y)) u(y) dy \right| \leq \left| \int_0^1 |(\mu_n - \mu)(x, y)| |u(y)| dy \right| \\
|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u)))(x)| &\leq \int_0^1 N_\infty(\mu_n - \mu) N_\infty(u) dy \leq N_\infty(\mu_n - \mu) N_\infty(u) \\
\text{Avec } N_\infty(u) &\leq 1 \text{ on obtient } N_\infty(T_{\varphi_n}(u) - T_\varphi(u)) \leq N_\infty(\mu_n - \mu) \text{ donc on}
\end{aligned}$$

a:

$$\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \leq N_\infty(\mu_n - \mu) \text{ et } \|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

IV Etude d'une application

1. On prend $\mu(x, y) = \sin(x, y)$ $\varphi(x, y, z) = \mu(x, y).z$ $r = N_\infty(\mu) = \sin 1$.

Or $-1 \in]-\frac{1}{\sin 1}, \frac{1}{\sin 1}[$ donc on peut appliquer l'étude précédente $S_{(\varphi, -1)}$ est un isomorphisme. Donc il existe un unique $w \in C([0, 1], \mathbf{R})$ tel que pour tout x de $[0, 1]$ $x = w(x) - \int_0^1 \sin(x, y) w(y) dy$

2.1 $w_1(x) = x(1 + \int_0^1 y w_1(y) dy)$ Donc si des solutions existent elles sont de la forme $w_1(x) = a.x$

avec $a = 1 + \int_0^1 y w_1(y) dy$ d'où $a = 1 + \int_0^1 a y^2 dy$ qui donne nécessairement $a = \frac{3}{2}$. On vérifie que $w_1(x) = 1,5.x$ est bien solution. D'où l'existence et l'unicité.

2.2 On pose pour $x \in [0, 1]$ $e_i(x) = x^i$. $\{e_1, e_3 \dots e_{2i+1} \dots e_{2n-1}\}$ est une famille libre de $C([0, 1], \mathbf{R})$. w_n est une solution de (E_n) ssi :

$$w_n(x) = e_1(x) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 y^{2i-1} w_n(y) dy \right] e_{2i-1}(x)$$

En raison de la liberté de la famille on a en posant

$$w_n = \sum_{i=1}^n a_{2i-1,n} e_{2i-1}$$

l'équivalence avec le système linéaire:

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= 1 + \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2j} . dy \\ a_{2i-1,n} &= \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2i+2j-2} . dy \\ a_{2n-1,n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2n+2j-2} . dy \end{aligned}$$

qui donne le système:

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2j+1} y^{2j} . \\ (-1)^{i+1} (2i-1)! a_{2i-1,n} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2i+2j-1} \\ (-1)^{n+1} (2n-1)! a_{2n-1,n} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2n+2j-1} \end{aligned}$$

2.3 On pose $\varphi_n(x, y, z) = v_n(x, y) . z$ $r_n = N_\infty(v_n)$.

On a la convergence uniforme de la série entière de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1}$ nrs $t \rightarrow \sin t$ sur $[0, 1]$. Pour t fixé la série numérique associée est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers zéro en décroissant. La valeur absolue du reste d'ordre p est donc inférieure à $\frac{1}{2p+1}$ ($t^{2p-1} \leq 1$). . . Pour $p \geq 2$ on a $N_\infty(v_p - v) \leq \frac{1}{5!}$ donc ce qui garantie que $N_\infty(v_p) \in [\sin 1 - \frac{1}{5!}, \sin 1 + \frac{1}{5!}] \subset]0, 1[$ et que l'on peut conclure avec II.3 car alors pour $n \geq 2$ $-1 \in \left[-\frac{1}{N_\infty(v_n)}, \frac{1}{N_\infty(v_n)}\right]$ et (E_n) admet une solution unique.

2.4 Dans 2.3 on a vu que $N_\infty(v_n - v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ avec III.3 on a $\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On a donc le résultat avec II.4.2.

Fin