

MATHS C, BQ PT 2010

 – ANALYSE CLASSIQUE

(Corrigé Marc REZZOUK, mrezzouk@free.fr)

1 - Première partie

1. 1.a Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \cos x > 0$. f est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- 1.b Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que f réalise une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$. / Que répondre d'autre à cette question ? /

- 1.c i. / le programme ne parle pas de difféomorphisme pour une fonction d'une variable (aberration du programme). Je trouve cette question assez hors-programme, il faut démontrer un résultat de cours connu des autres filières, il aurait mieux fallu admettre le résultat !/

Soit $a \in]-1, 1[$. Montrons que f^{-1} est dérivable en a . (cela tient au fait que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ mais c'est hors-programme).

Pour h assez petit, posons $x_h = f^{-1}(a + h) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, $a + h = f(x_h)$.

Le programme nous dit que f^{-1} est continue sur $[-1, 1]$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} x_h = x_0$.

On a

$$\frac{f^{-1}(a+h) - f^{-1}(a)}{h} = \frac{x_h - x_0}{f(x_h) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0} \right)^{-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Je suppose que le concepteur du sujet qui n'a pas scrupuleusement étudié le programme s'attendait plutôt à une réponse du genre, f ayant une dérivée non nulle sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $] -1, 1[$, sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$... résultat ne figurant malheureusement pas dans le programme (les résultats sur Arcsin sont plus ou moins admis en première période de PTSI...)

ii. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}.$

D'une part $f^{-1}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(f^{-1}(x)) > 0$, d'autre part $\cos^2(f^{-1}(x)) + \sin^2(f^{-1}(x)) = 1$.

Comme $\sin(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$, il vient $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

CONCLUSION : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

iii. Par composition avec la fonction $u \mapsto u^{-1/2}$, $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- 1.d Allure classique vue en première période de PTSI en présentant la symétrie par rapport à la première bissectrice.

2. 2.a $x \mapsto \alpha \operatorname{Arcsin}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et $u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par composition g_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^2$) sur $] -1, 1[$.

- 2.b Pour tout $x \in] -1, 1[$, $g'_\alpha(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x).$

2.c Puis

$$g''_\alpha(x) = \frac{-\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$$

$$g''_\alpha(x) = \frac{x}{1-x^2} g'_\alpha(x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} g_\alpha(x) \text{ d'où le résultat.}$$

- 2.d i. On suppose que pour $x \in] -1, 1[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - \alpha^2)a_n] x^n \text{ (on rapporte tout à } n=0) \end{aligned}$$

Comme cette série entière est supposée nulle sur $] -1, 1[$, tous ses coefficients sont nuls, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

- ii. Comme $a_1 = 0$, $a_3 = \frac{1 - \alpha^2}{2 \times 3} a_1 = 0$ et ainsi de suite par une récurrence rapide. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.
 iii. On obtient immédiatement pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{2p(2p-1)} \times \frac{(2p-4)^2 - \alpha^2}{(2p-2)(2p-3)} \times \cdots \times \frac{0^2 - \alpha^2}{2 \times 1} \times a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \alpha^2)}{(2p)!}. \end{aligned}$$

A partir de ces coefficients, on définit (synthèse du raisonnement) la série entière $\sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$.

Pour $x \neq 0$, posons $u_p = |a_{2p} x^{2p}|$. On a $\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right| x^2 = \frac{|(2p)^2 - \alpha^2|}{(2p+1)(2p+2)} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x^2$.

D'après le théorème de d'Alembert sur les séries numériques, si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$, la série est divergente. Le rayon de convergence vaut 1. Les calculs effectués plus haut sont justifiés a posteriori. La série entière est solution de l'équation différentielle ($\mathcal{E}$).

2.e On peut reprendre les calculs précédents avec a_0 et a_1 quelconques.

On suppose que a_0 ou a_1 est non nul. S'il existe une solution polynômiale alors la suite (a_n) est stationnaire nulle donc il existe une $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} = 0$ ce qui impose $\alpha = \pm n$ donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que α est un entier relatif.

Supposons pour fixer les idées que α est pair. On trouve alors une solution polynômiale (non triviale nulle) en posant $a_1 = 0$ et $a_0 = 1$.

(de même, en inversant si α est impair).

3. $g_1(x) = \cos(\text{Arcsin}(x)) = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$ (comme dans la question 1.c., avec $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$).

4. 4.a $g_2(x) = \cos(2 \text{Arcsin}(x)) = 2 \cos^2(\text{Arcsin}(x)) - 1 = 2(1-x^2) - 1 = \boxed{1-2x^2}$.

4.b $a_0 = 1$, $a_2 = -2$ et les autres a_n sont nuls.

5. 5.a $P_1 = 1 - 2x^2$.

Soit $k \geq 1$, $P_k(x) = \cos(2^k \text{Arcsin}(x)) = 2 \cos^2(2^{k-1} \text{Arcsin}(x)) - 1 = \boxed{2P_{k-1}^2(x) - 1}$.

Par récurrence immédiate P_k est un polynôme (pour $k \geq 1$).

Si on note d_k son degré et c_k son coefficient du terme de plus haut degré, on a

$d_1 = 2$, $c_1 = -2$, $c_2 = 8 = 2^3$ et $d_k = 2d_{k-1}$ et $c_k = 2c_{k-1}^2$.

Il vient par récurrence rapide, $\boxed{d_k = 2^k}$

5.b On a pour $k \geq 2$, $c_k = 2c_{k-1}^2$.

Remarque. pour $k \geq 2$, $\boxed{c_k = 2^{2^k - 1}}$.

(pour $k \geq 2$, $c_k = 2^{p_k}$. On a $p_{k+1} = 2p_k + 1$ et $p_2 = 3$ d'où $p_k = 2^k - 1$, suite arithmético-géométrique).

5.c i. $T_0(\cos x) = \cos(0) = 1$ et $T_1(\cos x) = \cos x$.

ii. $T_{m+2}(\cos x) + T_m(\cos x) = \cos((m+2)x) + \cos(mx) = 2 \cos((m+1)x) \cos(x)$ (formule de trigonométrie)
 $= 2 \cos(x) T_{m+1}(\cos x)$.

iii. On en déduit que pour tout $u \in [-1, 1]$, $T_0 = 1$, $T_1(u) = u$ et $T_{m+2}(u) = 2u T_{m+1}(u) - T_m(u)$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $m \geq 1$, $T_m(u)$ est une expression polynômiale en u de degré m et de coefficient 2^{m-1} .

(polynôme de Tchebycheff déjà tombé 50.000 fois).

iv. La remarque permet d'écrire $P_k(x) = T_{2^k}(x) = T_{2^{k-1}}(\cos(2 \text{Arcsin}(x))) = T_{2^{k-1}}(1 - 2x^2)$.

Il vient, pour $k \geq 2$, $c_k = (-2)^{2^{k-1}} \times 2^{2^{k-1}-1} = 2^{2^k-1}$.

2 - Deuxième partie

1. 1.a Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\tilde{g}(x) = g_2(x) = 1 - 2x^2$ d'après la question I.4.a.

1.b Comme $\tilde{g}(-1) = \tilde{g}(1)$, la fonction $\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et paire).

2. Comme $\tilde{g}$ est paire, pour tout $n \geq 1$, $b_n(\tilde{g}) = 0$.

$$a_0(\tilde{g}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{g}(t) dt = \int_0^1 \tilde{g}(t) dt = \int_0^1 (1 - 2t^2) dt = \frac{1}{3}.$$

Pour $n \geq 1$ avec $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$\begin{aligned} a_n(\tilde{g}) &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 \tilde{g}(t) \cos(n\omega t) dt = 2 \int_0^1 \tilde{g}(t) \cos(n\pi t) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - 2t^2) \cos(n\pi t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \cos(n\pi t) dt = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = 0 \text{ et on effectue deux intégrations par partie pour l'intégrale } \int_0^1 t^2 \cos(n\pi t) dt.$$

$$\begin{array}{ccccc} t^2 & & \xrightarrow{\quad} & 2t & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ \cos(n\pi t) & \xleftarrow{\quad} & \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} & \xleftarrow{\quad} & -\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} \end{array}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 \cos(n\pi t) dt &= \underbrace{\left[t^2 \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{2t \sin(n\pi t)}{n\pi} dt \\ &= \left[2t \frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} dt \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} - 2 \underbrace{\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n^3\pi^3} \right]_0^1}_{=0} = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{a_n(\tilde{g}) = \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \text{ pour } n \geq 1.}$

3. La fonction $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car sa restriction à $[-1, 1]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\tilde{g}$ est continue, on peut faire une petite figure...), donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge vers la régularisée de $\tilde{g}$ qui n'est autre que $\tilde{g}$ car elle est continue.

Ainsi, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$.

4. 4.a i. On applique la question II.3 pour $x = 1$. Il vient $\tilde{g}(1) = -1 = \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}$.

D'où la formule bien connue $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

- ii. On applique la question II.3 pour $x = 0$. Il vient $\tilde{g}(0) = 1 = \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

On peut écrire $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ (toutes les séries étant absolument convergentes), il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$

3 - Troisième partie

1. Notons que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \geq 0$, $\frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x} \geq \frac{1}{1+x^\beta}$ or $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta}$ diverge (car $\frac{1}{1+x^\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^\beta}$, intégrale de Riemann, avec $\beta \leq 1$).

Par comparaison entre deux fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}$ diverge.

2. 2.a Soit $p \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^p I_{k,\beta} = \int_0^{(p+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}$ donc si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}$ converge alors la série $\sum_{k \geq 0} I_{k,\beta}$ converge (et sa somme vaut la valeur de l'intégrale).

Réciproquement, si l'intégrale diverge alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x} = +\infty$ (car l'intégrande est positive) donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{(p+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p I_{k,\beta} = +\infty, \text{ la série converge également.}$$

- 2.b Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a

$$1 + (k\pi)^\beta \cos^2 x \leq 1 + x^\beta \cos^2 x \leq 1 + ((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x$$

Donc par passage à l'inverse et intégration sur $[k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\beta \cos^2 x} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}.$$

2.c

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + C^2 \cos^2 x} \stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{C^2}{1+t^2}} \times \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+C^2) + t^2} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}} \right) \right]_0^A = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{1+C^2}}}. \end{aligned}$$

En effet $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ et $dt = (1 + \tan^2 x) dx$.

- 2.d Par π -périodicité et parité de l'intégrande, on a $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x}$, de même pour l'autre intégrale. On applique alors la question précédente avec $C = k^{\beta/2} \pi^{\beta/2}$ ou $C = (k+1)^{\beta/2} \pi^{\beta/2}$ à la question III.2.b, il vient

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta}} \leq I_{k,\beta} \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^\beta \pi^\beta}}.$$

On en déduit aisément que $I_{k,\beta} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$. Par comparaison des séries à termes positifs avec les séries de Riemann, on en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} I_{k,\beta}$ converge si et seulement si $\frac{\beta}{2} > 1$. En appliquant enfin la question III.2.a, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } I_\beta \text{ converge si et seulement si } \beta > 2.}$