Partie I - Matrices carrées à coefficients entiers

I.A. On vérifie trivialement que $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ est un *sous-anneau* de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

I.B1. On vérifie trivialement que $GL_2(\mathbb{Z})$ est un *sous-groupe* de $GL_2(\mathbb{R})$. En particulier, la loi $\times$ est interne, entre autres du fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau.

I.B2. La condition est nécessaire : si A, $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ et $AB = \mathbb{I}_2$, alors $\det A \times \det B = 1$, avec $\det A$ et $\det B$ dans $\mathbb{Z}$, donc $\det A = \pm 1$. Inversement, si $\det A = \pm 1$, alors A a un inverse *dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ (utiliser la comatrice !)

I.C1. On vérifie trivialement que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un *sous-groupe* de $GL_2(\mathbb{Z})$.

I.C2. $3d - 5c = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\, c = 3k + 1 \quad \text{et} \quad d = 5k + 2.$

I.C3. $|\,3d - 5c\,| = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{\pm 1\}\,,\, c = 3k + \varepsilon \quad \text{et} \quad d = 5k + 2\varepsilon.$

I.C4. Cela équivaut trivialement à $a \wedge b = 1$.

I.D. En particulier,
- S est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non pas sur $\mathbb{R}$, car χ_S a deux zéros distincts, mais non réels.
- TS est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non pas sur $\mathbb{R}$, car χ_{TS} a deux zéros distincts, mais non réels.
- T est triangulable, mais non diagonalisable, sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $\mathbb{C}$, car χ_T a un zéro double sans que $T \in \operatorname{Vect}(\mathbb{I}_2)$.

I.E. Une telle matrice annule le polynôme $X^2 - 1$, simplement scindé. Elle est donc diagonalisable à spectre inclus dans $\{\pm 1\}$. Étant de déterminant $+1$, elle ne peut qu'être semblable, donc égale, à $\pm \mathbb{I}_2$. Inversement, ces deux matrices conviennent.

I.F. Une telle matrice annule le polynôme $X^2 + 1$, simplement scindé. Elle est donc diagonalisable à spectre inclus dans $\{\pm\,\mathrm{i}\}$. Étant de déterminant $+1$, elle ne peut qu'être semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, donc de trace nulle. Inversement, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ convient si, et seulement si, les entiers a, b, c vérifient $a^2 + bc = -1$.

I.G1. Pour des matrices d'ordre 2, on peut raisonner élémentairement comme il suit :
- si $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est scalaire, $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ lui est semblable si, et seulement si, elle lui est égale ;
- toute matrice A non scalaire est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{Tr}(A) \end{pmatrix}$.

On conclut alors facilement par disjonction de cas, en notant que trace et déterminant sont des invariants de similitude.

I.G2. C'est une conséquence de **I.G1**, sachant que les matrices A considérées et la matrice S sont $\mathbb{C}-$semblables à $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, donc $\mathbb{C}-$semblables entre elles.

Partie II - Réseaux de $\mathbb{C}$

II.A1. Clairement, Λ est un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$.

II.A2. On a toujours $\Im\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) \neq 0$, et on peut supposer $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathscr{H}$, quitte à remplacer α par $-\alpha$.

II.A3. Vérification immédiate.

II.B1. Vu les hypothèses, il existe huit entiers relatifs a, b, c, d, a', b', c', d' tels que

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}}_{A'}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$$

Les matrices A et A' sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, notamment car elles sont inverses l'une de l'autre. En outre, $\det A > 0$ vu l'hypothèse et la propriété **II.A3**.

II.B2. Inversement, si deux familles libres $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont telles que $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathscr{H}$ et $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$,

avec $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors on établit que $\Lambda_{\mathscr{B}'} \subset \Lambda_{\mathscr{B}}$ et $\Lambda_{\mathscr{B}} \subset \Lambda_{\mathscr{B}'}$, de sorte que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ engendrent un même réseau de $\mathbb{C}$.

II.C. Comme on ne requiert pas que $\dfrac{\omega_1'}{\omega_2'} \in \mathscr{H}$, on se reporte aux couples (c, d) trouvés en **I.C3**.

II.D. Il est nécessaire pour cela qu'il existe $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\tau' = a\tau + b$ et $1 = c\tau + d$. Comme $\tau \notin \mathbb{R}$, cela implique $c = 0$ et $d = 1$, puis $a = 1$, c'est-à-dire $\tau' \in \tau + \mathbb{Z}$. La réciproque est banale.

Partie III - Similitudes laissant stable un réseau

III.A1. Tout réseau Λ possède une base (α, β) telle que $\tau = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathscr{H}$. On a alors $\Lambda = \beta\Lambda_\tau$.

III.A2. Si $\Lambda_{\tau'} = \lambda\Lambda_\tau$, alors il existe $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\tau' = \lambda(a\tau + b)$ et $1 = \lambda(c\tau + d)$. Cela implique $c\tau + d \neq 0$ puis $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}\cdot$ Inversement, on remonte les calculs en choisissant $\lambda = \dfrac{1}{c\tau + d}$, ce qui a un sens.

III.B1. Ces deux ensembles sont en bijection, grâce à l'application

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \left(S \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \,:\, Z \in \mathbb{C} \longmapsto zZ\right)$$

III.B2. Si l'homothétie $Z \in \mathbb{C} \longmapsto \lambda Z$ stabilise Λ de base (α, β), alors $\lambda\alpha$ est de la forme $a\alpha + b\beta$, avec a et b entiers. De cela suit $\lambda = a \in \mathbb{Z}$. Inversement, toute homothétie de rapport entier convient. En conclusion, $S(\Lambda) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

III.B3. $S(\Lambda)$ peut entre autres être muni d'une structure de sous-anneau de $\mathbb{C}$.

III.B4. On a tout de suite $S(\Lambda_{\mathscr{B}}) = S(\Lambda_\tau)$.

III.B5. Si $z \in S(\Lambda_\tau)$, alors $z \times 1 \in \Lambda_\tau$, de sorte que $z \in \Lambda_\tau$. On en conclut que $S(\Lambda_\tau) \subset \Lambda_\tau$.

III.C1. Vu **III.B2**, il existe un $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau$. On a donc des entiers a, b, c, d tels que $z = a\tau + b$, avec $a \neq 0$, et $z\tau = c\tau + d$. Ainsi, τ est un zéro du polynôme $aX^2 + (b - c)X - d$ qui est bien de degré 2 puisque $a \neq 0$.

III.C2a. Si, inversement, τ annule P, alors on peut poser $z = u\tau \notin \mathbb{R}$: on a bien $z \in S(\Lambda_\tau)$ puisque $z \times 1 = u\tau$ et $z\tau = -v\tau - w$ sont dans Λ_τ. [Le réseau Λ_τ a alors une *multiplication complexe*. Cette notion joue un rôle important, notamment dans la théorie des courbes elliptiques.]

III.C2b. Nous allons montrer que ces deux ensembles sont égaux : il reste donc à établir l'inclusion $\Lambda_\tau \subset S(\Lambda_\tau)$. Or, nous venons de montrer que $z = 1 \times \tau \in S(\Lambda_\tau)$, de sorte que l'anneau $S(\Lambda_\tau)$ contient 1 et τ, et donc contient Λ_τ.

Partie IV – Action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathscr{H}$

IV.A1. L'inclusion découle de **II.A3**. À noter que le dénominateur $c\tau + d$ est effectivement non nul lorsque $\tau \in \mathscr{H}$.

IV.A2. Vérification immédiate.

IV.A3. Vérification immédiate.

IV.A4. Si $\Phi(A) = \mathbb{I}_{\mathscr{H}}$, alors $c\tau^2 + d\tau = a\tau + b$ pour tout $\tau \in \mathscr{H}$, qui est un ensemble de cardinal infini. On en conclut que $c = b = 0$ et $d = a$. Comme en outre $ad - bc = 1$, alors $d = a = \pm 1$. La réciproque est banale.

IV.A5a. $\Phi(A') = \Phi(A) \iff \Phi(A'A^{-1}) = \mathbb{I}_{\mathscr{H}} \iff A'A^{-1} = \pm\mathbb{I}_2 \iff A' = \pm A$.

IV.A5b. On a tout de suite $TS \neq \pm ST$, de sorte que $\Phi(TS) \neq \Phi(ST)$.

IV.B1. La relation demandée est immédiate. $\mathscr{C}$ est inclus dans $\mathscr{H}$ si, et seulement si, $\Im(\omega) > R$.

IV.B2. s est une involution (c'est d'ailleurs la composée d'une inversion avec une symétrie axiale). On a $z \in s\left(\mathscr{C}\right) \iff z \neq 0$ et $\dfrac{-1}{z} \in \mathscr{C}$. Cela donne tout de suite l'équation $z \in s\left(\mathscr{C}\right) \iff \left(|\omega|^2 - R^2\right)|z|^2 + (\omega z + \overline{\omega z}) + 1 = 0$. On vérifie alors facilement que $s\left(\mathscr{C}\right)$ est également un cercle (inclus dans $\mathscr{H}$). [On notera que le centre de l'image n'est pas l'image du centre : on a une division harmonique $(z_1, z_2, \omega, \infty)$, où z_1 et z_2 sont les extrémités du diamètre $O\omega$ de $\mathscr{C}$; donc $(s(z_1), s(z_2), s(\omega), 0)$ est harmonique puisque s se prolonge en une homographie de la droite projective complexe : ainsi, $s(\omega)$ est le conjugué harmonique de 0 par rapport aux extrémités du diamètre de $s(\mathscr{C})$ passant par O, alors que le centre de l'image est le milieu de ce diamètre.]

IV.C1. Préférer un calcul en coordonnées polaires ! $s(\mathscr{D})$ est le cercle de diamètre OB, avec B d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{\beta}$, privé du point O.

IV.C2. Si $\alpha = 0$, on trouve la demi-droite Oy, sinon, l'intersection avec $\mathscr{H}$ du cercle de diamètre OA, avec A d'affixe $\dfrac{-1}{\alpha}$.

IV.D. Question triviale. À noter que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{\imath}$.

IV.E1. Vu **II.A3**, il s'agit de rendre minimal $|cz + d|^2$, où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est telle que $g = \Phi(A) \in G$. Or, l'ensemble des $cz + d$ de cette forme est inclus dans $\Lambda_\tau \setminus \{0\}$, dont on vérifie facilement qu'il est discret.

IV.E2. Il existe un entier k, unique ou non, tel que $k - 1/2 \leqslant \Re(\tau') \leqslant k + 1/2$. On choisit alors $m = -k$. À noter que la partie imaginaire de $t^m(\tau')$ reste maximale.

IV.E3. Avec ce choix, posons $\tau'' = t^m(\tau')$. Si $|\tau''| < 1$, alors $s(\tau'')$ a une partie imaginaire $> \Im(\tau')$: c'est contradictoire. On conclut de tout cela que $\tau'' \in \mathscr{F}$. En outre, $\tau'' = h(\tau)$, avec $h = t^m \circ g_0 \in G$.

IV.F. Reste à établir que $\Gamma \subset G$. Si $g \in \Gamma$, on choisit τ_0 intérieur à $\mathscr{F}$, puis $\tau = g(\tau_0)$. Vu ce qui précède, on peut construire $h \in G$ tel que $h(\tau) = h \circ g(\tau_0) \in \mathscr{F}$. Vu le résultat admis, on a donc $h \circ g = \mathbb{I}_{\mathscr{H}}$ et cela établit que $g \in G$.