

1. $\int_0^n \frac{dy}{y+x+1} = \left[\ln|y+x+1| \right]_{y=0}^{y=n} = \ln(x+n+1) - \ln(x+1)$ pour $x \geq 0$.

Donc $I_n = \left[(x+n+1) \ln(x+n+1) - (x+n+1) \right]_{x=0}^{x=n} - \left[(x+1) \ln(x+1) - (x+1) \right]_{x=0}^{x=n}$

Il en résulte finalement que $I_n = (2n+1) \ln(2n+1) - 2(n+1) \ln(n+1)$ $\square$

2. Il vient $\ln(2n+1) = \ln(2n) + \ln(1 + \frac{1}{2n}) = \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O(\frac{1}{n^3})$

Donc $(2n+1) \ln(2n+1) = (2n+1) \ln n + (2n+1) \ln 2 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})$

$= 2n \ln n + (2 \ln 2)n + \ln n + (1 + \ln 2) + \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})$

De même $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})$

Donc $2(n+1) \ln(n+1) = 2n \ln n + 2 \ln n + 2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = 2n \ln n + 2 \ln n + 2 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$

Et finalement $I_n = (2 \ln 2)n - \ln n + \ln 2 - 1 - \frac{3}{4n} + O(\frac{1}{n^2})$ $\square$

3. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x+y+1}$ étant continue sur $[0, n]^2$, il vient que $I_n = \iint_{[0, n]^2} f(x, y) dx dy$.

Notons $Q_{i,j} = [i, i+1] \times [j, j+1]$. Par additivité de l'intégrale double, il vient que $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \iint_{Q_{i,j}} f(x, y) dx dy$.

Par positivité de l'intégrale double, il vient que $f(i+1, j+1) \leq \iint_{Q_{i,j}} f(x, y) dx dy \leq f(i, j)$.

Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(i+1, j+1) \leq I_n \leq S_n$ (1)

Or $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(i+1, j+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(i, j) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(i, j) = S_n - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} - 1 \right) = S_n - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + 1$

Par ailleurs classiquement $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n$ de sorte que $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(i+1, j+1) \geq S_n - 2 \ln n - 1$.

Il découle alors de (1) que $I_n \leq S_n \leq I_n + 2 \ln n + 1$ $\square$

4. Le principe des gendarmes prouve alors que $S_n \sim (2 \ln 2)n$ $\square$

5. En notant que $\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} x^j \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x^{i+j}$, il vient que $J_n = S_n \sim (2 \ln 2)n$ $\square$

6. Il est clair que si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de E_n alors elle est 1-p.o.

Réciproquement soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille 1-p.o. de E_n . Les vecteurs étant unitaires, pour prouver que la famille est une base orthonormée, il suffit de prouver que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Soit alors $i \neq j$. Par hypothèse on a en particulier $\|x_i + x_j\|^2 = 2$. Par ailleurs $\|x_i + x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 + 2(x_i | x_j) = 2 + 2(x_i | x_j)$. Donc $(x_i | x_j) = 0$. Ainsi :

Une famille de n vecteurs de E_n est une base orthonormée si et seulement si elle est 1-p.o. $\square$

7. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille μ -p.o. d'un espace préhilbertien réel et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Il vient en particulier que $\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 0$ donc $\lambda_i = 0$ pour tout i puisque $\mu > 0$. Donc la famille est libre.

Une famille quelconque étant libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre, il en résulte :

Une famille μ -p.o. d'une espace préhilbertien réel est libre. $\square$

8. Supposons qu'il existe $\mu \geq 1$ tel que la famille $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ soit μ -p.o.

Envisageons le polynôme $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Il vient que $\|Q_n\|^2 = J_n$. Donc $\|Q_n\|^2 \sim (2 \ln 2)n$ d'après la question 5.

Par ailleurs $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$ avec $a_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Comme la famille $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est μ -p.o., il vient que $\|Q_n\|^2 \leq \mu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}$ et cela pour tout entier n .

Ainsi $\|Q_n\|^2 / \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq \mu$ pour tout entier n . (1)

Or par principe de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs divergentes, il vient que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln n.$$

Donc $\|Q_n\|^2 / \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \sim 4 \ln 2 \frac{n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Contradiction avec (1). Donc :

La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre et unitaire mais n'est pas presque orthogonale. $\square$

9. La matrice M est évidemment symétrique. En outre elle est définie positive puisqu'elle est égale à la matrice du produit scalaire de E_n dans la base $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$. Il en découle qu'elle est orthodiagonalisable en une matrice D dont tous les éléments sont strictement positifs. Donc :

$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists D \text{ diagonale à éléments diagonaux strictement positifs} \quad \text{t.q.} \quad M = {}^t P D P$ $\square$

10 Il vient $\|W\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i V_i \mid \sum_{j=1}^n a_j V_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (V_i \mid V_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} a_i a_j$. Donc $\|W\|^2 = {}^t A M A$ $\square$

11 La relation ci-dessus redémontre que la matrice M est définie positive (et est égale à la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$) donc que ses valeurs propres (c'est à dire les éléments diagonaux de D) sont strictement positives. Des deux questions précédentes on tire que $\|W\|^2 = {}^t B D B$ avec $B = P A$. (1)

Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ le spectre de M en supposant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

De (1) ci-dessus on en déduit $\lambda_1 \|B\|^2 \leq \|W\|^2 \leq \lambda_n \|B\|^2$ $\square$

12 Comme P est orthogonale, on a $\|B\|^2 = \|P A\|^2 = \|A\|^2$ et la relation ci-dessus s'écrit donc : $\lambda_1 \|A\|^2 \leq \|W\|^2 \leq \lambda_n \|A\|^2$. Ce qui prouve que :

La base $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de vecteurs unitaires est μ -p.o. dès lors que $\mu \geq \max(\lambda_n, \frac{1}{\lambda_1})$ $\square$

13 On commence par remarquer qu'une suite $(V_m)_{m \geq 1}$ de E est μ -p.o. si et seulement si pour tout entier n la famille $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est μ -p.o.

Soient alors une suite $(V_m)_{m \geq 1}$ vérifiant la condition de l'énoncé, n un entier fixé quelconque, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une famille de réels quelconque et $W = \sum_{i=1}^n a_i V_i$. En notant $m_{i,j} = (V_i \mid V_j)$ et $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$, il vient :

$$\|W\|^2 = \|A\|^2 + 2 \sum_{i < j} m_{i,j} a_i a_j \text{ donc :}$$

$$\|A\|^2 - 2 \sum_{i < j} |m_{i,j}| |a_i| |a_j| \leq \|W\|^2 \leq \|A\|^2 + 2 \sum_{i < j} |m_{i,j}| |a_i| |a_j| \quad (1)$$

$$\text{Or } \sum_{i < j} |m_{i,j}| |a_i| |a_j| \leq \sum_{i < j} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j-i} |a_i| |a_j| = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \sum_{i=1}^{n-k} |a_i| |a_{i+k}|$$

$$\text{En outre par l'inégalité de Schwarz : } \sum_{i=1}^{n-k} |a_i| |a_{i+k}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} a_{i+k}^2} \leq \|A\|^2$$

$$\text{Donc } \sum_{i < j} |m_{i,j}| |a_i| |a_j| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \times \|A\|^2 \leq \frac{1}{\alpha-1} \|A\|^2$$

De (1) il résulte alors que $\frac{\alpha-3}{\alpha-1} \|A\|^2 \leq \|W\|^2 \leq \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \|A\|^2$ et cela pour tout entier n .

Comme $\alpha > 3$, il en résulte bien que la famille $(V_m)_{m \geq 1}$ est μ -p.o. avec $\mu = \max\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{\alpha-1}{\alpha-3}\right)$.

Une famille $(V_m)_{m \geq 1}$ d'un espace préhilbertien vérifiant la condition de l'énoncé est p.o. $\square$

- 14 • $x \mapsto f(x, 1) = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+2}$ de dérivée $-\sqrt{3} \frac{x-1}{(x+2)^2 \sqrt{2x+1}} < 0$ pour $x > 1$ établit un homéomorphisme décroissant de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.
- $y \mapsto f(1, y) \equiv 1$
 - $G : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ de dérivée $-\frac{x-1}{(x+1)^2 \sqrt{x}} < 0$ pour $x > 1$ établit également un homéomorphisme décroissant de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.
 - $y \mapsto \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \equiv 0$.
 - $x \mapsto f(x, y)$ de dérivée $-y^2 \sqrt{2y+1} \frac{x-1}{\sqrt{2xy+1}} < 0$ pour $x > 1$ réalise encore un homéomorphisme décroissant de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$
 - $y \mapsto f(x, y)$ de dérivée $-(x-1)^2 \frac{y}{((x+1)y+1)^2 \sqrt{4xy^2+2(x+1)y+1}} < 0$ établit un homéomorphisme décroissant de $[1, +\infty[$ sur $\left] \frac{2\sqrt{x}}{x+1}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{2x+1}}{x+2} \right]$

15 La fonction $x \mapsto f(x, y)$ réalise pour tout $y \geq 1$ un homéomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$, donc :

Pour tout $\gamma \in]0, 1[$ et tout $y \geq 1$, il existe un unique $x = \varphi_\gamma(y) > 1$ tel que $f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma$ □

Comme G réalise également un homéomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$, de même :

Il existe un unique $\beta > 1$ tel que $G(\beta) = \gamma$. □

Soit $y \geq 1$ fixé quelconque. On a $\gamma = G(\beta) = \lim_{z \rightarrow +\infty} f(\beta, z) \leq f(\beta, y)$ puisque $z \mapsto f(\beta, z)$ décroît.

Or $\gamma = f(\varphi_\gamma(y), y)$. Donc $f(\varphi_\gamma(y), y) \leq f(\beta, y)$. Or $x \mapsto f(x, y)$ décroît donc $\beta \leq \varphi_\gamma(y)$.

$\beta \leq \varphi_\gamma(y)$ pour tout $y \geq 1$. □

16 La suite (Q_i) étant μ -p.o., on a en particulier en considérant le polynôme $X^{k_i} - X^{k_{i+1}}$:

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{2k_i+1} + \frac{1}{2k_{i+1}+1} \right) \leq \frac{1}{2k_i+1} + \frac{1}{2k_{i+1}+1} - \frac{2}{k_i+k_{i+1}+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Le membre de droite étant strictement inférieur à $\frac{1}{2k_i+1} + \frac{1}{2k_{i+1}+1}$, il vient que $\mu > 1$ □

L'inégalité ci-dessus s'écrit encore $\frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_1+k_{i+1}+1} \leq \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Pour $i \geq 1$ on a $k_i \geq 1$ puisque $i \mapsto k_i$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on peut écrire $k_{i+1} = x_i k_i$ avec $x_i > 1$ puisque la suite (k_n) est strictement croissante.

En posant $\gamma = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}$, l'inégalité ci-dessus s'écrit $f(x_i, k_i) \leq \gamma$ pour $i \geq 1$ avec $x_i > 1$ et $k_i \geq 1$.

Or $\gamma \in]0, 1[$. Donc $\gamma = f(\varphi_\gamma(k_i), k_i)$ d'après la question précédente.

Ainsi $f(x_i, k_i) \leq f(\varphi_\gamma(k_i), k_i)$. Or $x \mapsto f(x, k_i)$ est décroissante. Donc $x_i \geq \varphi_\gamma(k_i)$.

D'après la question précédente, il existe $\beta > 1$ ($\beta = G^{-1}(\gamma)$) tel que $\varphi_\gamma(k_i) \geq \beta$ pour tout $i \geq 1$ (car alors $k_i \geq 1$).

Il en découle que $x_i \geq \beta$ pour tout $i \geq 1$.

En résumé :

Si la suite (P_{k_i}) est p.o., il existe $\beta > 1$ tel que $k_{i+1} \geq \beta k_i$ pour tout $i \geq 1$. □

————— FIN —————