

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
 ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
 DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
 DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
 DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE
 (Option TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION M

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS II - M

Le problème comporte trois parties indépendantes ; néanmoins, la 5ème question de la 2ème partie utilise les résultats de la 1ère partie, et la 10ème question de la 3ème partie, ceux de la seconde.

Notations

R désigne l'ensemble des réels ; Z l'ensemble des entiers relatifs.

La fonction exponentielle sera notée indifféremment $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

1ère PARTIE

Soit λ un réel n'appartenant pas à Z. Soit $u_n, n = 1, 2, \dots$ le terme général d'une suite définie par la relation :

$$u_n = \int_0^\pi \cos(\lambda x) \cdot \cos(rx) \, dx.$$

1°) Calculer u_n et en déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2°) Soit $C_n(x)$ l'expression suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

Montrer que, pour des valeurs de x qui seront précisées, il existe des rationnels A et B tels que :

$$C_n(x) = A + B \frac{\sin[(2n+1) \frac{x}{2}]}{\sin(\frac{x}{2})}$$

3°) Soit Φ l'application de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Montrer que Φ est continûment dérivable sur cet intervalle $[0, \pi]$.

4°) Montrer la relation :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi(x) \sin[(2n+1) \frac{x}{2}] \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin[(2n+1) \frac{x}{2}]}{\sin(\frac{x}{2})} \, dx.$$

5°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que la première intégrale de la relation (1) a une limite lorsque n croît indéfiniment et la déterminer.

6°) Soit I_n la seconde intégrale de cette relation (1) ; en évaluant la différence $I_{n+1} - I_n$, calculer I_n .

7°) A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout réel λ n'appartenant pas à \mathbb{Z} , il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \lambda}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}.$$

2ème PARTIE

Soit un réel α strictement supérieur à 1 ; posons :

$$g(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}, \quad J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

1°) Montrer la convergence de l'intégrale définissant $J(\alpha)$.

2°) Donner l'expression du réel $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ et de la quantité :

$$\frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right).$$

3°) Montrer, pour $t \in [0, 1]$, la relation :

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$

Déterminer, lorsque l'entier n croît indéfiniment, la limite de la suite de terme général :

$$\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$$

4°) En déduire les relations :

$$g(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\alpha-1}.$$

5°) En utilisant les résultats de la première partie, en déduire que $J(\alpha)$ s'exprime simplement à l'aide de $\frac{\pi}{\alpha}$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$; déterminer son expression.

3ème PARTIE

Soit toujours un réel α strictement supérieur à 1 ; soit un réel x ; considérons les intégrales :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt^\alpha)}{1+t^\alpha} dt.$$

1°) Préciser les ensembles de définition des fonctions Γ et f_α .

2°) Montrer que, pour tout x strictement positif, $\Gamma(x+1)$ s'exprime en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

3°) Montrer que la fonction f_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4°) Soit A un réel strictement positif ; montrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \quad 0 < f_\alpha(0) - f_\alpha(x) < [1 - \exp(-xA^\alpha)]. f_\alpha(0) + \int_A^\infty \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

En déduire que la fonction f_α est continue à droite en 0.

5°) Soit n un réel strictement positif ; montrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \quad 0 < f_\alpha(x) < n + f_\alpha(0) \cdot \exp(-xn^\alpha).$$

En déduire que, lorsque le réel x croît indéfiniment, l'expression $f_\alpha(x)$ admet une limite ; déterminer cette limite.

6°) Soit a un réel strictement positif ; soit h un réel vérifiant les conditions :

$h \neq 0, h > -\frac{a}{2}$; montrer l'inégalité :

$$\left| \frac{1}{h} [f_\alpha(a+h) - f_\alpha(a)] + \int_0^\infty \frac{t^\alpha \exp(-at^\alpha)}{1+t^\alpha} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^\infty \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} \exp\left(-\frac{at^\alpha}{2}\right) dt.$$

Justifier l'existence des intégrales considérées ; en déduire que la fonction f_α est dérivable sur la demi-droite $]0, +\infty[$; quelle est une expression de cette dérivée ?

7°) Montrer la relation :

$$(2) \quad \forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = - \int_0^\infty \exp(-xt^\alpha) dt.$$

Montrer que l'intégrale figurant dans le second membre de la relation (2), s'exprime au moyen de x et de $\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$.

8°) A l'aide des résultats précédents montrer la relation :

$$\forall x > 0, \quad f_\alpha(x) e^{-x} + \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \int_1^x t^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-t} dt = u(x),$$

u étant une application de $]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

9°) Montrer, en utilisant la 3ème partie - 5°, qu'il vient plus précisément :

$$(3) \quad f_\alpha(x) e^{-x} = \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \int_x^\infty t^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-t} dt.$$

10°) En utilisant cette relation (3), et les résultats établis ci-dessus, montrer que, pour tout réel p , compris strictement entre 0 et 1, il vient :

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$; en déduire, après en avoir montré la convergence, la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$