

Exercice 1 :

- a. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(x, y) \in T \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ et $-x \leq y \leq 1$, donc :

$$\iint_T (x+y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x+y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left((x+\frac{1}{2}) + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{4}{3}.$$

- b. Posons $T' = -T$, et $f(x, y) = |x+y|$ pour $(x, y) \in C$, alors $C = T \cup T'$, f est continue sur C et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in T \cap T'$, donc $\iint_C f(x, y) dx dy = \iint_T f(x, y) dx dy + \iint_{T'} f(x, y) dx dy$. Avec le changement de variable $\varphi : T \rightarrow T'$, $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ est un C^1 -difféomorphisme de T sur T' de Jacobien 1, donc $\iint_{T'} f(x, y) dx dy = \iint_T f \circ \varphi(x, y) dx dy = \iint_T f(x, y) dx dy$ car $f \circ \varphi = f$.

En conclusion :

$$\iint_C f(x, y) dx dy = 2 \iint_T f(x, y) dx dy = 2 \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Exercice 2 :

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre : $(E_n) \quad xy' - ny = 0$ où n est un entier strictement positif.

- Sur I (resp. J) l'équation différentielle (E_n) s'écrit : $y' - \frac{n}{x}y = 0$ et la fonction $x \mapsto \frac{n}{x}$ est continue sur I (resp. sur J), ce qui montre que si $S_I(E_n)$ (resp. $S_J(E_n)$) désigne l'ensemble des solutions de (E_n) sur I (resp. sur J) alors $S_I(E_n)$ (resp. $S_J(E_n)$) est un espace vectoriel réel de dimension 1. L'application $x \mapsto x^n$ est solution de (E_n) sur I (resp sur J) donc : $S_I(E_n) = \text{vect}(I \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto x^n)$ (resp. $S_J(E_n) = \text{vect}(J \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto x^n)$).

- Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme y est C^1 , sa courbe est donc une droite.

En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.

- Supposons $n > 1$, soit y une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$. (voir question 1.) et donc $y(0) = 0$

Réciproquement : toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$ avec $y(0) = 0$, alors y est continue sur $\mathbb{R}$ car $n > 1$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} y'(x) = 0$, donc le théorème de

prolongement de la dérivée, montre que y est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 0$ et y vérifie l'équation différentielle (E_n) .

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les

fonctions : $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Problème Autour du théorème d'Abel pour les séries entières .**I. Généralités****1. Exemples**

- a. Exemple de suite (a_n) vérifiant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$:

Soit (a_n) telle que $a_n = 0$ et $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ car la série

harmonique alternée $\sum a_n$ converge et vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ln(1+x)$ pour $|x| < 1$

et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)$.

b. Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$:

la suite (a_n) telle que : $a_n = (-1)^n$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum a_n$ diverge et elle vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}$ pour $|x| < 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$.

c. Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$:

la suite (a_n) telle que : $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum a_n$ diverge (série harmonique) et elle ne vérifie pas $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

d. Dans l'exemple c. la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence 1 et ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$, en effet si la série entière converge uniformément sur $] -1, 1[$, alors par $\lim_{x \rightarrow 1^-} a_n x^n = a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on aura la série $\sum a_n$ converge ce qui n'est pas possible. Donc la convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ne peut-être uniforme.

2. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente. Soit $f_n : x \rightarrow a_n x^n$, alors par : $\forall x \in [0, 1[$, $|f_n(x)| \leq |a_n|$ et que $\sum |a_n|$ converge, on a $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1[$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. **Exemple :**

Si l'on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, pour $n > 1$, on a alors $\sum a_n$ converge absolument ($|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$) et

par la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe et vaut $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Or $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, donc, pour $x \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= (x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - x \\ &= (x+1) \ln(1+x) - x \end{aligned}$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \ln(2) - 1$ et puis $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = 2 \ln(2) - 1$

II. Théorème d'Abel

4. On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

a. On sait que $a_k = r_{k-1} - r_k$ pour tout $k \geq 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \geq 1$, on a :

$$a_{n+p} = r_{n+p-1} - r_{n+p} \text{ et puis } \sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n(x).$$

b. Pour $x \in [0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $m > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^m (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} &= \sum_{p=1}^m r_{n+p-1}x^{n+p} - \sum_{p=1}^m r_{n+p}x^{n+p} \\
&= x \sum_{p=1}^m r_{n+p-1}x^{n+p-1} - \sum_{p=1}^m r_{n+p}x^{n+p} \\
&= xr_nx^n + x \sum_{p=2}^m r_{n+p-1}x^{n+p-1} - \sum_{p=1}^m r_{n+p}x^{n+p} \\
&= r_nx^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{m-1} r_{n+p}x^{p-1} + r_{n+m}x^{n+m}
\end{aligned}$$

et comme la suite $(x_{n+m})_m$ est bornée, que $r_{n+m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, et que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^m (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = R_n(x)$, il en résulte que $\sum_{p \geq 1} r_{n+p}x^{p-1}$ converge et que :

$$\sum_{p=1}^{\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = r_nx^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p}x^{p-1}$$

c. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim r_n = 0$, (reste d'une série convergente), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $n \geq n_0$. Donc, pour tout entier naturel p et tout entier $n \geq n_0$, on a : $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors :

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} \right| \\
&= \left| r_nx^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p}x^{p-1} \right| \\
&\leq |r_n| + (1-x) \sum_{p=1}^{\infty} |r_{n+p}| x^{p-1} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-x) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^{p-1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \frac{1}{1-x} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

pour $x = 1$, on a $|R_n(1)| = |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n \geq n_0$.

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow \|R_n\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \leq \varepsilon)$.

d. D'après la question précédente, la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, donc la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et comme $x \mapsto a_n x^n$ est continue, il en résulte par le théorème de continuité de la limite uniforme, que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

5. On suppose que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, on a alors $\sum a_n$ diverge car sinon, par 4.d), $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ serait finie.

6. **Exemple :**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (\arctan)(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ pour } |x| < 1, \text{ et par intégration, on a : } \arctan(x) = \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C^{te} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ car } \arctan(0) = 0. \text{ Donc : } \forall x \in]-1; 1[; \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&\text{avec } a_{2n} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

La série $\sum a_n$ converge (série alternée variant le critère spécial). Par la question 4.), il en résulte que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

En conclusion :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

7. Application

a. Soient les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geq 1$. Posons

$$c_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \text{ pour } n \geq 0, \text{ alors } c_0 = c_1 = 0 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{k^{\frac{1}{4}} (n-k)^{\frac{1}{4}}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{\frac{1}{4}}}$$

pour $n \geq 2$. Or pour $k \in [1, n-1]$, on a : $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$, donc $|c_n| \geq \frac{n-1}{(\frac{n^2}{4})^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et par

suite $\sum c_n$ diverge (car son terme général ne tend pas vers 0).

b. On considère les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ associées rep. aus suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . Comme les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors les rayons de convergence des séries entières associées sont au moins égaux à 1. Par le théorème d'Abel, on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Or pour $x \in]0; 1[$, les séries numériques $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n x^n = \sum_{k=0}^n u_k x^k v_{n-k} x^{n-k}$, donc (d'après le cours sur le produit de Cauchy de deux

séries entières) : $\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$, et par passage à la limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

III. Réciproque du théorème d'Abel .

8. La réciproque du théorème d'Abel est fausse , il suffit de prendre la suite $(a_n = (-1)^n)$

9. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs telle la série entière associée est de rayon de convergence égal à 1

et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Soit $x \in]0, 1[$, et $n \in \mathbb{N}$, on a alors : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k}_{\geq 0} \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k$ (*). En faisant tendre x

vers 1, on obtient : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) < +\infty$.

Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs et que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée, on en déduit que $\sum a_n$ converge .

Dans la suite, on appliquera le théorème de Littlewood, sans démonstration .

IV. Séries harmoniques transformées

10. On rappelle que si $(a_n)_n$ est une suite numérique alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n| x^n$ ont même rayon de convergence . Soit maintenant $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels tels que $\varepsilon_n \in \{-1; 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} Rcv(\sum \varepsilon_n x^n) &= Rcv(\sum x^n) = 1 \\ \text{et} \\ Rcv(\sum \frac{\varepsilon_n}{n} x^n) &= Rcv(\sum \frac{1}{n} x^n) = 1 \end{aligned} .$$

Dans la suite, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$. On remarque que

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ pour tout } x \in]-1, 1[$$

11. Si $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge, alors par le théorème d'Abel, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement : Supposons que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, puisque $\frac{\varepsilon_n}{n} = O(\frac{1}{n})$ car $|\varepsilon_n| = 1$, le théorème de Littlewood s'applique, on a donc $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

12. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est périodique de période p , on alors pour $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^{n-1} \\ &= \varepsilon_1 x^0 + \dots + \varepsilon_p x^{p-1} + \varepsilon_1 x^p + \dots + \varepsilon_p x^{2p-1} + \varepsilon_1 x^{2p} + \dots \\ &= \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} + \varepsilon_2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+1} + \dots + \varepsilon_p \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+p-1} \\ &= \sum_{i=1}^p \varepsilon_i x^{i-1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_i x^{i-1}}{1 - x^p} \end{aligned}$$

Donc l'expression de $g(x)$ est une fraction rationnelle en x .

13. On prend (ε_n) périodique de période 2 avec : $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$ (ici $p = 2$), Donc $\varepsilon_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par la question 11. la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x g(t) dt. \text{ Or, d'après la question 12. : } g(x) = \frac{\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i x^{i-1}}{1 - x^2} = \frac{-1}{1 - x^2} + \frac{x}{1 - x^2} = -\frac{1}{x+1}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$ et donc $f(x) = \int_0^x g(t) dt = -\ln(1+x)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\ln(2)$, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

On prend cette fois-ci $\varepsilon_n = 1$, ((ε_n) est périodique de période $p = 1$), alors $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

et $f(x) = \int_0^x g(t) dt = -\ln(1-x)$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, alors $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

14. D'après la question 12. $g(x)$ est une fraction *rationnelle* en x : $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k x^{k-1}$ et

$$Q(x) = 1 - x^p = (1 - x) \sum_{k=0}^{p-1} x^k$$

On a $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_0^1 g(t) dt$ converge.

On sait que g est continue sur $[0, 1[$ (somme d'une série entière) et qu'au voisinage de 1, on a :

$$Q(x) \sim p(1-x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = P(1) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k. \text{ Si } P(1) \neq 0, \text{ alors } g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{P(1)}{p(1-x)} \text{ et } \int_0^1 g(t) dt \text{ diverge.}$$

Si $\sum_{k=1}^p \varepsilon_k = P(1) = 0$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{P'(1)}{p}$ et g admet donc un prolongement par continuité en 1,

et donc $\int_0^1 g(t)dt$ converge .

Conclusion : $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum_{k=1}^p \varepsilon_k = 0$.

Si p est impair alors $\sum_{k=1}^p \varepsilon_k \neq 0$ car $\varepsilon_n \in \{-1; 1\}$ et par suite la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge .

15. **Exemple :**

Ici $p = 6$ avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$, on a alors $P(1) = \sum_{k=1}^6 \varepsilon_k = 0$, et donc par la

question 14. la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x g(t)dt$.

Or pour $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{(x^2 + x + 1)(1 - x^3)} \\ &= \frac{1 - x^6}{(x^2 + x + 1)(1 - x^3)} \\ &= \frac{(x^3 + 1)(1 - x^3)}{(x^2 + x + 1)(1 - x^3)} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(1 - x + x^2)} \\ &= \frac{1}{1 - x + x^2} + \frac{x^2}{1 + x^3} \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1 - t + t^2} dt &\stackrel{u=2t-1}{=} \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}u^2} \frac{1}{2} du = \int_{-1}^{2x-1} \frac{2}{3+u^2} du \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

et $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln(1+x^3)$, on a $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) +$

$\frac{1}{3} \ln(1+x^3)$ pour tout $x \in [0, 1[$ et puis $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{3} \ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3} \ln 2$,

Conclusion :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{3} \ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3} \ln 2$$
