

MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

EXERCICE 1 – Racine cubique d'une matrice

Partie I – Étude d'un exemple

Q1. Il s'agit ici de montrer que A est diagonalisable. Pour cela, on peut calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 12 \\ 1 & X-5 \end{vmatrix} = (X-4)(X-5) - 12 = X^2 - 9X + 8 = (X-1)(X-8)$$

Ainsi, A possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir 1 et 8) : puisque A est une matrice carrée de taille 2, elle est donc diagonalisable, et est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, ce qui est précisément ce qui était demandé.

Q2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Puisque $(P^{-1}BP)^3 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^3P$, il vient :

$$B^3 = A \iff B^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}B^3P = D \iff (P^{-1}BP)^3 = D$$

Ainsi, B est une racine cubique de A si et seulement si $P^{-1}BP$ est une racine cubique de D .

Q3. Puisque Δ est une racine cubique de D , $\Delta \times D = \Delta \times \Delta^3 = \Delta^3 \times \Delta = D \times \Delta$.

Ecrivons alors $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\text{Alors } \Delta \times D = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} \text{ et } D \times \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix}, \text{ donc, puisque } \Delta \times D = D \times \Delta : \begin{cases} a = a \\ 8b = b \\ c = 8c \\ 8d = 8d \end{cases}$$

Par conséquent, $b = c = 0$, donc Δ est une matrice diagonale.

Q4. i. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D .

D'après **Q3.**, Δ est une matrice diagonale, que l'on peut donc écrire $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Ainsi, } \Delta^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}, \text{ et comme } \Delta^3 = D, \begin{cases} \lambda^3 = 1 \\ \mu^3 = 8 \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto t^3$ établissant une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , on déduit des deux égalités ci-dessus que $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$

ii. Réciproquement, on vérifie facilement que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une racine cubique de D .

Par conséquent, D possède une unique racine cubique, à savoir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après **Q2.**, on en déduit que A possède une unique racine cubique, à savoir $P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times P^{-1}$.

Partie II – Dans un plan euclidien

Q5. Puisque u est représenté dans une base *orthonormée directe* par $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, u est la rotation vectorielle d'angle θ .

Q6. Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta/3$: alors $r \circ r \circ r$ est la rotation d'angle $3 \times \theta/3 = \theta$, c'est-à-dire u .

r étant représenté dans \mathcal{B} par la matrice $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta/3) & \cos(\theta/3) \end{pmatrix}$, cette matrice vérifie $R^3 = M$.

R est donc une racine cubique de M .

Q7. En notant v l'endomorphisme de E représenté, dans \mathcal{B} , par la matrice N , puisque N est une matrice orthogonale dont le déterminant vaut -1 , v est une isométrie vectorielle vérifiant $\det(v) = -1$: c'est donc une réflexion de E . En particulier, v est une symétrie, et vérifie donc $v \circ v = \text{Id}_E$.

Par conséquent, $v \circ v \circ v = v$, et donc $N^3 = N$: N est une racine cubique de N .

Partie III – Racines cubiques et diagonalisation

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Q8. On vérifie facilement que la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt[3]{\lambda} \end{pmatrix}$ est une racine cubique de $H_p(\lambda)$.

Q9. Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \times \underbrace{\begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}}_{\text{écriture par blocs}} \times P^{-1}$.

En notant, pour tout $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$, $R_{p_k}(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt[3]{\lambda_k} \end{pmatrix}$, d'après **Q8.**, $R_{p_k}^3 = H_{p_k}$, et donc :

$$\begin{pmatrix} R_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $P \times \begin{pmatrix} R_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} \times P^{-1}$ est une racine cubique de A .

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Q10. S'il existait $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$ tel que $\lambda_k = 0$, alors $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A - \lambda_k I_n) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, et A ne serait pas inversible. A étant supposée inversible, aucune de ses valeurs propres ne peut être nulle.

Q11. Il s'agit d'un résultat de cours de sup : tout nombre complexe non nul possède exactement trois racines cubiques. On peut le re-démontrer en introduisant $z \in \mathbb{C}^*$, que l'on écrit donc sous la forme $z = r e^{i\varphi}$ (où $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$) :

$$z^3 = \lambda \iff r^3 e^{i3\varphi} = \rho e^{i\theta} \iff \begin{cases} r^3 = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid 3\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

0 n'étant clairement pas une racine cubique de λ , le travail précédent permet de conclure que l'ensemble des racines cubiques de λ est $\left\{ \sqrt[3]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} ; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}}, \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}}, \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \right\}$, et on justifie que les trois valeurs proposées dans la dernière description sont deux à deux distinctes (par injectivité de l'application définie sur $[\theta/3; \theta/3 + 2\pi[$ par $t \mapsto e^{it}$).

Q12. Notons, pour tout $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$, $\mu_{1,k}$, $\mu_{2,k}$ et $\mu_{3,k}$ les racines cubiques (deux à deux distinctes) de λ_k , de sorte que $X^3 - \lambda_k = (X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k})$.

$$\text{Ainsi, } Q(X) = \prod_{k=1}^d ((X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k})).$$

Puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts et non nuls, les valeurs $\mu_{i,k}$ (où $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq k \leq d$) sont deux à deux distinctes, et Q est donc scindé à racines simples.

Q13. A étant diagonalisable, puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A , le polynôme

$$P = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$$
 est annulateur de A .

$$\text{En d'autres termes, } \prod_{k=1}^d (A - \lambda_k I_n) = 0_{n,n}.$$

Ainsi, si B est une racine cubique de A , $\prod_{k=1}^d (B^3 - \lambda_k I_n) = 0_{n,n}$, et $Q(X)$ est donc un polynôme annulateur de B . Ce dernier étant scindé à racines simples, on en déduit que B est diagonalisable.

EXERCICE 2 – La fonction $\ln(\Gamma)$

Partie I – Existence de la solution du problème étudié

Q14. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2 - x}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, si $x^2 - x \neq 0$ (c'est-à-dire si $x \neq 1$), $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{x^2 - x}{2n^2} \right|$, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

Si $x^2 - x = 0$ (c'est-à-dire si $x = 1$), $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

$\sum u_n(x)$ est donc convergente, quelle que soit la valeur de $x > 0$: $\sum u_n$ converge donc simplement sur $]0; +\infty[$.

Q15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une combinaison linéaire de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, donc u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, et, pour tout $x > 0$:

$$u'_n(x) = 1 \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1/n}{1 + x/n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n + x} = \frac{x}{n(n+x)} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n+x} + \frac{x}{n(n+x)} \right)$$

On remarque alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n+x} + \frac{x}{n(n+x)} \right) &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{n+x}{n(n+x)} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Ce dernier calcul montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n+x} + \frac{x}{n(n+x)} \right)$ est indépendante de x . Ainsi, si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}$, alors :

$$\triangleright \text{pour tout } x > 0, u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n;$$

$$\triangleright \varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}, \text{ ce qui justifie que } \sum \varepsilon_n \text{ est absolument convergente, donc convergente.}$$

Q16. Fixons deux réels a et b dans $]0; +\infty[$ tels que $a < b$.

$$\text{Pour tout } x \in [a; b], |u'_n(x)| \leq \left| \frac{x}{n(n+x)} \right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|.$$

On justifie facilement que $\sum \frac{b}{n(n+a)}$ converge, si bien que $\sum \left(\frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n| \right)$ est une série convergente dont le terme général ne dépend pas de $x \in [a; b]$.

On a ainsi établi la convergence normale de $\sum u'_n$ sur le segment $[a; b]$, et ce, pour tout segment $[a; b] \subset]0; +\infty[$.

Q17. Vérifions les quatre conditions de (C) :

i. puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, puisque $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et comme $\sum u'_n$ converge (normalement donc) uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, donc $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \ln$ aussi ;

ii. pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) - \varphi(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) - \ln(x+1) \right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \ln(x) \right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left((x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) \right) - \ln(x+1) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) - \ln(x) \right) \\
&= \left(x \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) - \ln(x+1) \right) \\
&\quad - \left(x \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \ln(x) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) + \ln(x) - \ln(x+1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+x+1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n+x}{n} \right) \right) + \ln(x) - \ln(x+1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+x+1}{n+x} \right) \right) + \ln(x) - \ln(x+1) \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln(N+1) - \ln \left(\frac{N+x+1}{x+1} \right) \right) + \ln(x) - \ln(x+1) \text{ (télescopage)} \\
&= \underbrace{\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(N+1)(x+1)}{N+x+1} \right)}_{=\ln(x+1)} + \ln(x) - \ln(x+1) \\
&= \ln(x)
\end{aligned}$$

iii. pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \right)$, et comme $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est croissante sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{t}{n(n+t)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$ est croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit facilement que φ' est croissante sur $]0; +\infty[$;

iv. comme $\ln(1) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 1 \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$, $\varphi(1) = 0$.

φ vérifie donc les quatre conditions de (C).

Partie II – Unicité de la solution

Q18. Pour tout $x > 0$:

$h(x+1) - h(x) = (\varphi(x+1) - g(x+1)) - (\varphi(x) - g(x)) = (\varphi(x+1) - \varphi(x)) - (g(x+1) - g(x)) = \ln(x) - \ln(x) = 0$
Il suffit alors de dériver la fonction constante $x \mapsto h(x+1) - h(x)$ (qui est de classe \mathcal{C}^1) pour déduire de l'égalité précédente que, pour tout $x > 0$, $h'(x+1) - h'(x) = 0$.

Q19. i. Puisque φ' et g' sont croissantes, et comme $x > 0$, $\varphi'(p) \leq \varphi'(x+p)$ et comme $x \leq 1$, $g'(x+p) \leq g'(1+p)$, donc $-g'(1+p) \leq -g'(x+p)$, et donc $\varphi'(p) - g'(1+p) \leq \varphi'(x+p) - g'(x+p) = h'(x+p)$.

ii. De même, $\varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p)$ et $g'(x+p) \geq g'(p)$, d'où il découle : $h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p)$.

iii. $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p) = \varphi'(p) - \left(g'(p+1) - \frac{1}{p} \right)$, donc $\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$.

en dérivant l'égalité : $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$

iv. En injectant l'égalité $h'(p) = \varphi'(p) - g'(1+p) + \frac{1}{p}$ dans l'encadrement précédent, il vient :

$$\underbrace{\varphi'(p) - g'(1+p) - \left(\varphi'(p) - g'(1+p) + \frac{1}{p} \right)}_{=-1/p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \underbrace{\varphi'(1+p) - g'(p) - h'(p)}_{=\varphi'(1+p) - \varphi'(p) = 1/p}$$

Par conséquent, $|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$.

Q20. Soit $(x, y) \in]0; 1]^2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |h'(x) - h'(y)| &= |h'(x+p) - h'(y+p)| \quad (\text{car } h' \text{ est 1-périodique, d'après Q18.}) \\ &= |(h'(x+p) - h'(p)) - (h'(y+p) - h'(p))| \\ &\leq |h'(x+p) - h'(p)| + |h'(y+p) - h'(p)| \quad (\text{d'après l'inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \quad (\text{d'après Q19.}) \\ &= \frac{2}{p} \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans une inégalité large ($p \rightarrow +\infty$), on en déduit que $|h'(x) - h'(y)| \leq 0$, autrement dit $h'(x) = h'(y)$.

h' est donc constante sur $]0; 1]$, et comme h' est 1-périodique (d'après Q18.), h' est constante sur $]0; +\infty[$.

Q21. Toujours d'après Q18., $h(1) = h(2)$ (on évalue l'égalité $h(x+1) = h(x)$ en $x = 1$), donc, d'après le théorème de Rolle, h' s'annule entre 1 et 2.

Puisque h' est constante, on en déduit que h' est identiquement nulle, et donc h est constante.

De plus, $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0$, donc h est identiquement nulle, et donc $\varphi = g$.

Partie III – La formule de duplication

Q22. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)\right) \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{2n}} \\ &= \sqrt{\prod_{n=1}^N \frac{n+1}{n}} \times \prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \\ &= \sqrt{N+1} \times \prod_{n=1}^N \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n)} \quad (\text{le premier produit est télescopique}) \\ &= \sqrt{N+1} \times \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)!} \\ &= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \end{aligned}$$

Q23. $\psi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\varphi(1)}_{=0} - \frac{1}{2} \ln(\pi) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi).$

Pour calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right)$, commençons par déterminer la limite de $\left(\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)_{N \geq 1}$ (cette limite existe, puisque, d'après Q14., $\sum u_n\left(\frac{1}{2}\right)$ converge). D'après la formule de Stirling :

$$\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \times \frac{2^{2N} \times 2\pi N \left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{4\pi N} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, $\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\ln(\pi)}{2} - \ln(2)$.

Finalement, $\psi(1) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln(\pi)}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(\pi) = 0$.

Q24. Montrer que, pour tout $x > 0$, $(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \ln(\pi)$ revient à établir que $\psi = \varphi$.

Puisque, d'après les parties I et II, φ est l'unique fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui vérifie (C), il suffit de montrer que ψ vérifie également (C) pour conclure :

- i. puisque φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$, ψ l'est aussi ;
 ii. pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= \left(x \ln(2) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) \right) \\ &\quad - \left((x-1) \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) \right) \\ &= \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \text{ car } \varphi \text{ vérifie (C)} \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

iii. pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2} \varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right)$, et comme φ vérifie (C), φ' est croissante, donc ψ' aussi ;

iv. $\psi(1) = 0$ d'après **Q23**.

ψ vérifie donc (C).

Par unicité de φ en tant que solution de (C), on en déduit que :

$$\forall x > 0, (x-1) \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

EXERCICE 3 – Temps d'attente avant une collision

Partie I – Une expression de l'espérance de T_n

Q25. Pour qu'une même valeur se répète au cours de tirages avec remise, on doit effectuer au moins 2 tirages, et au plus $n+1$ tirages (dans le cas où les n numéros apparaissent tous lors de n premiers tirages).

Par conséquent, $T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$.

Q26. i. Puisque, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, $Z(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket^k$.

ii. Pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^k$:

$$P(Z = (i_1, \dots, i_k)) = \underbrace{P((X_1 = i_1) \cap \dots \cap (X_k = i_k))}_{\text{par indépendance de } X_1, \dots, X_k} = P(X_1 = i_1) \times \dots \times P(X_k = i_k) = \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}$$

Z suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket^k$.

Q27. $\text{Card}(A)$ est le nombre de k -listes sans répétition de $\llbracket 1; n \rrbracket$: il y en a donc $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

L'événement $(T_n > k)$ se réalise si et seulement si, lors des k premiers tirages, les numéros obtenus sont deux à deux distincts, autrement dit lorsque X_1, \dots, X_k prennent des valeurs deux à deux distinctes, autrement dit lorsque $Z \in A$.

Ainsi, $(T_n > k) = (Z \in A)$.

Puisque Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket^k$, $P(Z \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$.

Q28. T_n étant une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, elle possède nécessairement une espérance finie.

Puisque T_n est à valeurs dans \mathbb{N} , son espérance peut être donnée par la formule $E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k)$:

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n > k-1) = \sum_{\ell=0}^n P(T_n > \ell) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}$$

Partie II – Une expression intégrale de l'espérance

Q29. $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$.

De plus, $t^2 \times t^k e^{-t} = t^{k+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (par croissances comparées), donc $t^k e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

est convergente, par comparaison, $\int_1^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est également convergente.

Finalement, I_k est une intégrale convergente.

Q30. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Effectuons une intégration par parties sur I_{k+1} en posant, pour tout $t \geq 0$:

$$\left[\begin{array}{l} u(t) = t^{k+1} \quad \text{donc} \quad u'(t) = (k+1)t^k \\ v'(t) = e^{-t} \quad \text{ou plutôt} \quad v(t) = -e^{-t} \end{array} \right]$$

Les fonctions u et v ainsi définies sur de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , et $u(t) \times v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, si bien que toutes les intégrales ci-dessous convergent, et :

$$I_{k+1} = [t^{k+1} \times (-e^{-t})]_0^{+\infty} + (k+1) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (k+1)I_k$$

On en déduit, par un raisonnement par récurrence rapide, que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k! \times I_0$.

Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, on conclut que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q31. Pour tout $t \geq 0$, $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^\ell e^{-t} = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \left(\frac{t}{n}\right)^\ell e^{-t}$, donc $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ est une combinaison linéaire de fonctions continues sur \mathbb{R}_+ dont l'intégrale sur \mathbb{R}_+ est convergente, et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \left(\frac{t}{n}\right)^\ell e^{-t} dt \\ &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!n^\ell} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^\ell e^{-t} dt}_{=I_\ell = \ell!} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!n^\ell} \\ &= E(T_n) \end{aligned}$$

Partie III – Un équivalent de l'espérance

III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q32. Posons $v = t - n$: la fonction $t \mapsto t - n$ étant de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur $[n; +\infty[$, le changement de variable ainsi défini permet d'écrire une nouvelle intégrale convergente (dans laquelle $dv = dt$), égale à la précédente :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v+n}{n}\right)^n e^{-(v+n)} dv = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $v \geq 0$, $1 + \frac{v}{2n} \leq e^{\frac{v}{2n}}$, et puisque ces deux quantités sont positives, on en déduit :

$$\left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{v}{2n}}\right)^n = e^{\frac{v}{2}}$$

Par conséquent, pour tout $v \geq 0$, $\left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} \leq e^{\frac{v}{2}} \times e^{-v} = e^{-\frac{v}{2}}$ (car $e^{-v} > 0$).

Donc, par croissance de l'intégrale : $0 \leq K_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}} dv = [-2e^{-\frac{v}{2}}]_0^{+\infty} = 2$.

Cet encadrement étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a établi que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.

Q34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(2 + \frac{v}{n}\right)^n}_{=2^n \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n} e^{-v} dv = \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n$.

Puisque $0 < 2 < e$, $0 < \frac{2}{e} < 1$, donc $\left(\frac{2}{e}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et comme (K_n) est une suite bornée, $J_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q35. Posons $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$: la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{n}}$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0; n]$, on peut écrire $du = \frac{dt}{\sqrt{n}}$ et :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u\sqrt{n}}{n}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} (\sqrt{n} du) = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

Q36. Pour tout $u \in]0; \sqrt{n}[$:

$$\begin{aligned} \ln(f_n(u)) &= n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k - u\sqrt{n} \quad \text{car } 0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} - u\sqrt{n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} \end{aligned}$$

Q37. Soit $u \in]0; \sqrt{n}[$.

Puisque $0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$, $\left(\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}}}\right)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante, qui converge vers 0, tout comme $\left(\frac{1}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right)_{k \geq 1}$.

On peut donc appliquer les conclusions du critère spécial des séries alternées à la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$ (dont la convergence est déjà acquise).

En particulier, $\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| = \left| \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} \right| \leq \frac{1}{3} \frac{u^3}{n^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$.

On en déduit que $\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{u^2}{3} \times \frac{u}{\sqrt{n}}}_{\text{car } 0 < \frac{u}{\sqrt{n}} < 1} \leq \frac{u^2}{3}$, donc :

$$\ln(f_n(u)) \leq \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{2} = -\frac{u^2}{6}$$

Q38. i. $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$ et comme, pour tout $u \geq 1$, $u^2 \geq u$, il vient : $e^{-u^2/2} \leq e^{-u/2}$.
Puisque $u \mapsto e^{-u/2}$ est intégrable en $+\infty$, c'est aussi le cas de $u \mapsto e^{-u^2/2}$.

Par conséquent, $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

ii. Soit $u > 0$.

Pour tout entier $n > u^2$:

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) e^{-u\sqrt{n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(n \left(\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) e^{-u\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(u\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1)\right) e^{-u\sqrt{n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + o(1)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$.

De plus, les fonctions f_n ($n \geq 1$) et la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ sont toutes continues sur \mathbb{R}_+ .

Enfin, d'après **Q37**, pour tout $u \in]0; \sqrt{n}[$, $0 \leq f_n(u) \leq e^{-\frac{u^2}{6}}$... et cet encadrement demeure valable pour tout $u > 0$. De même qu'en i., $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{6}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$.

III.3 - Conclusion

Q39. D'après **Q31.**, $E(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt = I_n + J_n$.

Puisque $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (**Q34.**) et $I_n = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$, $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$.

Par conséquent :

$$E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$