

**I-Préliminaires**

**I-A-Projection sur un convexe fermé**

**Q 1.**  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \langle a|b \rangle$  et  $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \langle a|b \rangle$ , ce qui donne en sommant l'égalité demandée.

On interprète cette égalité appelée " égalité du parallélogramme" en disant que dans un parallélogramme, la somme des carrés des deux diagonales est égale à la somme des carrés des quatres côtés.

**Q 2.** On applique l'égalité précédente à  $a = u - v$  et  $b = u - v'$ , on obtient que

$$\|2u - (v + v')\|^2 = 2(\|u - v\|^2 + \|u - v'\|^2) - \|v - v'\|^2 = 4\|u - v\|^2 - \|v - v'\|^2, \text{ or } \|v - v'\|^2 > 0, \text{ donc}$$

$$4\|u - \frac{v + v'}{2}\|^2 < 4\|u - v\|^2.$$

**Q 3.**  $F$  étant non vide, l'ensemble  $\{\|u - w\| / w \in F\}$  est non vide minoré par 0, ce qui assure l'existence de  $d = d(u, F) = \inf_{w \in F} \{\|u - w\|\}$ .

On va montrer que cette distance est atteinte.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite  $(w_n)_n$  de  $F$  tel que  $\|u - w_n\| \rightarrow d$ , donc  $(w_n)_n$  est bornée dans  $E$  qui est de dimension finie, donc on peut extraire une sous-suite  $(w_{\varphi(n)})_n$  convergente vers  $v \in \overline{F} = F$ , donc  $\|u - w_{\varphi(n)}\| \rightarrow \|u - v\|$  et  $\|u - w_{\varphi(n)}\| \rightarrow d$  et par unicité de la limite  $d = \|u - v\|$ , donc  $\forall w \in F, \|u - v\| \leq \|u - w\|$ .

**Q 4.** L'existence est assurée par la question précédente grâce à la fermitude de  $C$ .

Pour l'unicité, supposons qu'il existe  $v \neq v'$  dans  $C$  tel que  $d(u, C) = \|u - v\| = \|u - v'\|$ , alors d'après la question Q2.,  $\|u - \frac{v + v'}{2}\| < \|u - v\|$ , or  $C$  est convexe, donc  $\frac{v + v'}{2} \in C$ , ce qui contredit la minimalité de  $v$ .

**I.B- Inégalité de Holder pour l'espérance**

**Q 5.** L'inégalité est triviale si  $ab = 0$ .

Si  $ab > 0$ , par concavité de la fonction  $\ln$ , on aura  $\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$  et la croissance de  $\ln$ , donne l'inégalité demandée.

**Q 6.**  $\Omega$  est fini, donc les espérances en question existent.

- Si  $E(|X|^p) = E(|Y|^q) = 1$ , alors grâce à l'inégalité  $|XY| \leq \frac{|X|^p}{p} + \frac{|Y|^q}{q}$  et vu que l'espérance est croissante et linéaire, on obtient  $E(|XY|) \leq \frac{1}{p}E(|X|^p) + \frac{1}{q}E(|Y|^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

-  $X$  et  $Y$  sont bornées grâce à la finitude de  $\Omega$ , donc si  $M$  est un majorant de  $|Y|$ , alors  $|XY| \leq M|X|$  et par suite  $E(|X|) = 0$  entraîne que  $E(|XY|) = 0$ , de plus  $E(|X|) = 0 \iff E(|X|^p) = 0$ .

- Si  $E(|X|) = 0$  ou  $E(|Y|) = 0$ , alors l'inégalité est triviale.

- Si non, on pose  $X' = \frac{X}{(E(|X|^p))^{1/p}}$  et  $Y' = \frac{Y}{(E(|Y|^q))^{1/q}}$ , alors  $E(|X'|^p) = E(|Y'|^q) = 1$ , donc  $E(|X'Y'|) \leq 1$  et par linéarité de l'espérance, on obtient l'inégalité demandée.

**I.C- Espérance conditionnelle**

**Q 7.** Posons  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$ , or  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  est un système complet

d'événements, donc  $P(X = x_k) = \sum_{i=1}^m P_{A_i}(X = x_k)P(A_i)$ .

Les sommes sont finies, ce qui permet de les permuter et on obtient

$$E(X) = \sum_{i=1}^m P(A_i) \sum_{k=1}^n x_k P_{A_i}(X = x_k) = \sum_{i=1}^m P(A_i) E(X|A_i).$$

**I.D- Variables aléatoires à queue sous-gaussienne**

**Q 8.** Si  $t > \sqrt{y_n}$ , alors  $P(|X| \geq t) = 0$ , donc  $\int_0^{+\infty} tP(|X| \geq t)dt$  converge et la relation de Chasles, donne en posant  $y_0 = 0$  et  $I_i = ]\sqrt{y_{i-1}}, \sqrt{y_i}]$ ,  $\int_0^{+\infty} tP(|X| \geq t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} tP(|X| \geq t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} t \sum_{j=i}^n P(|X| = \sqrt{y_j})dt$ .

En permutant les deux sommes, on obtient

$$\int_0^{+\infty} tP(|X| \geq t)dt = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \int_{I_i} tP(|X| = \sqrt{y_j})dt = \sum_{j=1}^n \int_0^{\sqrt{y_j}} tP(|X| = \sqrt{y_j})dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n y_j P(|X| = \sqrt{y_j}) = \frac{1}{2} E(X^2).$$

**Q 9.**  $E(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} tP(|X| \geq t)dt \leq 2a \int_0^{+\infty} t \exp(-bt^2)dt = -\frac{a}{b} [\exp(-bt^2)]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}$ .

**Q 10.** L'inégalité  $|X| + |\delta| \geq |X + \delta|$  entraîne l'inclusion des événements  $(|X + \delta| \geq t) \subset (|X| \geq t - |\delta|)$ , d'où  $P(|X + \delta| \geq t) \leq P(|X| \geq t - |\delta|)$ .

**Q 11.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(t) = (a - \frac{1}{2}bt^2) + b(t - |\delta|)^2 = \frac{1}{2}bt^2 - 2b|\delta|t + a + b|\delta|^2$  de discriminant  $\frac{1}{2}b(b|\delta|^2 - a) \leq 0$  vu l'inégalité  $|\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$ , donc  $P(t)$  garde un signe constant positif celui de  $bt^2$ , ce qui donne l'inégalité.

**Q 12.** Avec la question Q10 et Q11 et grâce à la condition  $t - |\delta| \geq 0$ , on obtient  $P(|X + \delta| \geq t) \leq a \exp(-b(t - |\delta|)^2) \leq a \exp(a - \frac{1}{2}bt^2) = a \exp(a) \exp(-\frac{1}{2}bt^2)$ .

**Q 13.** La condition  $0 \leq t < |\delta|$  entraîne  $t - |\delta| < 0$ , donc  $P(|X| \geq t - |\delta|) = P(|X| \geq 0) \leq a$ , or  $a - \frac{1}{2}bt^2 \geq a - bt^2 > a - b|\delta|^2 \geq 0$  vu l'encadrement de  $|\delta|$ , donc  $1 \leq \exp(a - \frac{1}{2}bt^2)$  ce qui donne  $P(|X| \geq t - |\delta|) \leq a \times 1 \leq a \exp(a - \frac{1}{2}bt^2)$ .

## II - L'inégalité de concentration de Talagrand

### II.A Étude de deux cas particuliers

**Q 14.** Si  $C$  ne rencontre pas  $X(\Omega)$ , alors  $P(X \in C) = 0$  et l'inégalité est triviale.

**Q 15.** Posons  $u = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i$ , alors  $Y = \frac{1}{4}d(X, u)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i - \eta_i)^2}{4}$ .

La variable  $Y_i = \frac{(\varepsilon_i - \eta_i)^2}{4}$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  suivant les cas  $\varepsilon_i = \eta_i$  ou  $\varepsilon_i = -\eta_i$  avec

$P(Y_i = 1) = P(\varepsilon_i = -\eta_i) = \frac{1}{2}$ , donc  $Y_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ , ce qui entraîne que  $Y = \frac{1}{4}d(X, u)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i$  est somme de  $n$  variables indépendantes de Bernoulli, donc suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

**Q 16.**  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, u)^2)) = E(\exp(\frac{1}{2}Y)) = \sum_{k=0}^n \exp(\frac{k}{2}) C_n^k \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} (\sqrt{e} + 1)^n \leq \frac{1}{2^n} 4^n = 2^n$ .

**Q 17.**  $u \in C$ , donc  $d(X, C) \leq d(X, u)$  et par suite  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) \leq 2^n$ , de plus  $(X \in C) = (X = u) = (\varepsilon_1 = \eta_1, \dots, \varepsilon_n = \eta_n)$  et par indépendance des événements, on aura  $P(X \in C) = P(\varepsilon_1 = \eta_1) \dots P(\varepsilon_n = \eta_n) = \frac{1}{2^n}$ , ce qui assure l'inégalité  $P(X \in C) E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) \leq 1$ .

### II.B - Initialisation

**Q 18.** Supposons que  $X(\Omega)$  rencontre  $C$  en  $u = e_1$  et  $v = -e_1$ , alors si on pose  $X = \varepsilon_1 e_1$ , on aura  $d(X, u)^2 = (\varepsilon_1 - 1)^2$  et  $d(X, v)^2 = (\varepsilon_1 + 1)^2$ , donc  $d(X, u)^2$  ou  $d(X, v)^2$  est nulle, d'où  $d(X, C) = 0$  et par suite  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) = 1$ , de plus  $P(X \in C) = P(X = u) + P(X = v) = P(\varepsilon_1 = 1) + P(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , ce qui entraîne l'inégalité.

### II.C - Propriétés de $C_{+1}$ et $C_{-1}$

**Q 19.** Si  $x' \in C_t$ , alors par définition de  $C_t$ ,  $x' = \pi(x' + te_n)$  où  $x' + te_n \in C$ .

Réciproquement si  $x' + te_n \in C$ , alors  $x' + te_n \in C \cap H_t$ , donc  $\pi(x' + te_n) = x' \in \pi(C \cap H_t) = C_t$ .

**Q 20.**  $H_t$  est un sous-espace, donc convexe, d'où  $C \cap H_t$  est convexe comme intersection de deux convexes, et  $\pi$  linéaire, donc  $\pi(C_t)$  est convexe comme image d'un convexe par une application linéaire.  $C_t$  contient 0.

Soit  $t \in \{-1, 1\}$  et  $x_n = y_n + te_n$  une suite de  $C \cap H_t$  telle que  $\pi(x_n) = y_n$  converge vers  $y \in C_t$ , donc  $(x_n)_n$  converge vers  $y + te_n \in C \cap H_t$ , donc  $C_t$  est un fermé.

**Q 21.**  $\{(\varepsilon_n = 1), (\varepsilon_n = -1)\}$  est un système complet d'événements, donc

$P(X \in C) = P(X \in C | \varepsilon_n = 1) P(\varepsilon_n = 1) + P(X \in C | \varepsilon_n = -1) P(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2} P(X' \in C_1) + \frac{1}{2} P(X' \in C_{-1})$ .

### II.D - Une inégalité cruciale

**Q 22.**  $Y_{\varepsilon_n} \in C_{\varepsilon_n}$  et  $Y_{-\varepsilon_n} \in C_{-\varepsilon_n}$ , donc  $Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n \in C$  et  $Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n \in C$  et par convexité de  $C$ , on obtient  $u = (1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) \in C$ , donc  $d(X, C) \leq d(X, u) = \|u - X\|$ .

**Q 23.**  $X = X' + \varepsilon_n e_n$ , donc en écrivant  $X' = (1 - \lambda)X' + \lambda X'$ , on aura  $u - X = v - 2\lambda \varepsilon_n e_n$  où  $v = (1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') \in E'$ , or  $e_n \in (E')^\perp$ , donc  $\|u - X\|^2 = \|v\|^2 + 4\lambda^2$ , ce qui donne l'inégalité  $d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|v\|^2$  et par inégalité triangulaire  $d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$ . Par définition de  $Y_t$ ,  $\|Y_t - X'\| = d(X', C_t)$ , ainsi on a  $d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$ .

### II.E - Espérances conditionnelles

**Q 24.**  $X(\Omega) \cap C$  contient au moins deux éléments  $u = u' + e_n$  et  $v = v' - e_n$ , donc d'après la question Q19,  $v' \in C_{-1}$ , donc  $P(X' \in C_{-1}) \geq P(X' = v') > 0$ .

**Q 25.** De l'inégalité Q23., on obtient  $\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2) \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2})(\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{\varepsilon_n})^2))^{1-\lambda} \cdot (\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{-\varepsilon_n})^2))^\lambda$  et par linéarité et croissance de l'espérance conditionnelle, on aura  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2) | \varepsilon_n = -1) \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2}) E((\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2))^{1-\lambda} \cdot (\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2))^\lambda)$ .

**Q 26.** Avec  $p = \frac{1}{1-\lambda}$  et  $q = \frac{1}{\lambda}$ , on a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  et avec l'inégalité de la question Q6., on en déduit l'inégalité.

$$E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)|\varepsilon_n = -1) \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2})(E(\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2)))^{1-\lambda} \cdot (E(\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2)))^\lambda.$$

**Q 27.**  $C_{+1}$  est un convexe fermé de  $E'$  qui est de dimension  $n - 1$ , donc par hypothèse de récurrence  $P(X' \in C_{+1})E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)|\varepsilon_n = 1) \leq 1$ , ce qui entraîne l'inégalité  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)|\varepsilon_n = 1) \leq \frac{1}{p_+}$ .

**Q 28.** Par hypothèse de récurrence  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2)) \leq \frac{1}{p_-}$  et  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2)) \leq \frac{1}{p_+}$ , de plus  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) = E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)|\varepsilon_n = 1)P(\varepsilon_n = 1) + E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)|\varepsilon_n = -1)P(\varepsilon_n = -1)$ , ce qui donne en combinant les inégalités précédentes et l'inégalité de Q27., l'inégalité demandée.

### II.F - Optimisation

**Q 29.** On écrit  $p_+ = p_+^\lambda \cdot p_+^{1-\lambda}$  et on obtient  $\frac{1}{p_-^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{p_+^\lambda} = \frac{1}{p_+} (\frac{p_-}{p_+})^{\lambda-1} = \frac{1}{p_+} (1-\lambda)^{\lambda-1}$  et par l'inégalité de Q28.,

$$\text{on obtient } E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) \leq \frac{1}{2p_+} (1 + \exp(\frac{\lambda^2}{2})(1-\lambda)^{\lambda-1}).$$

**Q 30.** Soit la fonction définie sur  $[0, 1[$  par  $f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ , alors  $f''(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2} + \frac{x}{1-x} \geq 0$ , donc  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $f'(x) \geq f'(0) = 0$  et par suite  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $f(x) \geq f(0) = 0$ , ce qui donne l'inégalité.

**Q 31.** Il suffit de composer par l'exponentielle et ajouter 1 dans l'inégalité précédente.

**Q 32.** L'inégalité précédente avec la question Q29., on obtient  $E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) \leq \frac{2}{(2-\lambda)p_+}$ .

D'après la question Q21.,  $P(X \in C) = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)$ , de plus  $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$  et avec les inégalités des questions Q31. et Q29., on obtient

$$P(X \in C) \cdot E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) \leq \frac{p_+ + p_-}{p_+(2-\lambda)} = \frac{p_+ + p_-}{p_+ + p_-} = 1, \text{ ce qui achève la récurrence.}$$

### II.G - Inégalité de Talagrand

**Q 33.** On a égalité des événements  $(d(X, C) \geq t) = (\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2) \geq \exp(\frac{t^2}{8}))$  et en utilisant l'inégalité de Markov, on obtient  $P(d(X, C) \geq t) = P(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2) \geq \exp(\frac{t^2}{8})) \leq E(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2))\exp(-\frac{t^2}{8})$ , ce qui donne l'inégalité de Talagrand en utilisant l'inégalité (II.1).

### III - Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

#### III.A - Une inégalité de concentration

**Q 34.**  $g$  est continue comme composée de  $M \mapsto Mu$  qui est continue par linéarité en dimension finie et de la norme qui est 1-lipschitzienne, donc continue.

$C$  est image réciproque du fermé  $[0, r]$  par l'application continue  $g$ , donc fermé.

Soit  $M, N \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , alors

$$g(\lambda M + (1-\lambda)N) = \|(\lambda M + (1-\lambda)N)u\| \leq \lambda \|Mu\| + (1-\lambda)\|Nu\| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r, \text{ donc } \lambda M + (1-\lambda)N \in C.$$

**Q 35.**  $\|Mu\|^2 = \sum_{i=1}^k (Mu)_i^2$  avec  $(Mu)_i^2 = (\sum_{j=1}^d M_{i,j}u_j)^2$  et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(Mu)_i^2 \leq \sum_{j=1}^d M_{i,j}^2 \cdot \sum_{j=1}^d u_j^2 = \sum_{j=1}^d M_{i,j}^2 \cdot \|u\|^2 = \sum_{j=1}^d M_{i,j}^2, \text{ donc } \|Mu\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d M_{i,j}^2 = \|M\|_F^2.$$

**Q 36.**  $C$  étant convexe fermé de l'espace euclidien  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ , donc  $d(M, C) = \|M - N\|_F$  où  $N \in C$ , donc d'après la question précédente  $\|(M - N)u\| \leq d(M, C)$ , donc si  $d(M, C) < t$ , alors  $\|(M - N)u\| < t$ , donc  $g(M) = \|Mu\| < t + \|Nu\| = t + g(N) < t + r$ .

**Q 37.** L'implication précédente entraîne l'inclusion des événements  $(g(M) \geq r + t) \subset (d(M, C) \geq t)$ , donc  $P(g(M) \geq r + t) \leq P(d(M, C) \geq t)$ , de plus  $(g(X) \leq r) = (X \in C)$ , donc  $P(g(X) \leq r) = P(X \in C)$ .

$C$  étant non vide convexe fermé, donc d'après l'inégalité de Talagrand, on aura

$$\forall t > 0, P(g(X) \leq r) \cdot P(g(M) \geq r + t) \leq P(X \in C) \cdot P(d(X, C) \geq t) \leq \exp(-\frac{1}{8}t^2).$$

#### III.B - Médianes

**Q 38.**  $G$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $g(X)$ , donc  $G$  croissante de limite 1 en  $+\infty$ , ce qui assure que  $G^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  est non vide et  $G$  de limite 0 en  $-\infty$ , donc  $G^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  est minoré, on conclut donc que  $G^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  admet une borne inférieure  $m$ .

$G$  étant continue à droite, alors  $G(m) \geq \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $P(g(X) \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .

$P(g(X) \geq m) = 1 - P(g(X) < m) = 1 - \lim_{t \rightarrow m^-} G(t)$ , or  $\forall t < m$ ,  $G(t) < \frac{1}{2}$ , donc par passage à la limite

$\lim_{t \rightarrow m^-} G(t) \leq \frac{1}{2}$ , ce qui donne  $P(g(X) \geq m) \geq \frac{1}{2}$ .

**Q 39.**  $(|g(X) - m| \geq t) = (g(X) \geq m + t) \cup (g(X) \leq m - t)$ , donc  
 $P(|g(X) - m| \geq t) = P(g(X) \geq m + t) + P(g(X) \leq m - t)$ .

On applique l'inégalité de la question Q37. avec  $r = m$  et  $r = m - t$ , on obtient

$$P(g(X) \geq m + t) \leq \frac{\exp(-\frac{1}{8}t^2)}{P(g(X) \leq m)} \leq 2\exp(-\frac{1}{8}t^2) \text{ et } P(g(X) \leq m - t) \leq \frac{\exp(-\frac{1}{8}t^2)}{P(g(X) \geq m)} \leq 2\exp(-\frac{1}{8}t^2),$$

ce qui donne l'inégalité  $P(|g(X) - m| \geq t) \leq 2\exp(-\frac{1}{8}t^2) + 2\exp(-\frac{1}{8}t^2) = 4\exp(-\frac{1}{8}t^2)$ .

**Q 40.** En utilisant la question Q8., on obtient grâce à l'inégalité précédente,

$$E((g(X) - m)^2) = 2 \int_0^{+\infty} tP(|g(X) - m| \geq t)dt \leq 8 \int_0^{+\infty} t\exp(-\frac{1}{8}t^2)dt = 32 \left[ \exp(-\frac{1}{8}t^2) \right]_0^{+\infty} = 32.$$

**Q 41.**  $g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \sum_{i=1}^k (Xu)_i^2$ , donc par linéarité de l'espérance  $E(g(X)^2) = \sum_{i=1}^k E((Xu)_i^2)$ , or  $(Xu)_i^2 =$

$$\left( \sum_{j=1}^d u_j \varepsilon_{i,j} \right)^2 = \sum_{i=1}^d u_j^2 (\varepsilon_{i,j})^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq d} u_j \varepsilon_{i,k}, \text{ de plus } E(\varepsilon_{i,k}) = 1P(\varepsilon_{i,k} = 1) + (-1)P(\varepsilon_{i,k} = -1) = 0, \text{ ce qui}$$

entraîne que  $E\left( \sum_{1 \leq j < k \leq d} u_j \varepsilon_{i,k} \right) = \sum_{1 \leq j < k \leq d} u_j E(\varepsilon_{i,k}) = 0$  et par suite vu que

$$E((\varepsilon_{i,j})^2) = 1^2P(\varepsilon_{i,k} = 1) + (-1)^2P(\varepsilon_{i,k} = -1) = 1, \text{ on aura } E((Xu)_i^2) = \sum_{i=1}^d u_j^2 E((\varepsilon_{i,j})^2) = \sum_{i=1}^d u_j^2 = \|u\|^2 = 1.$$

On conclut que  $E(g(X)^2) = \sum_{i=1}^k 1 = k$ .

En utilisant l'inégalité de Holder avec  $p = q = 2$  aux variables aléatoires  $g(X)$  et  $Y = 1$ , on obtient

$$E(g(X)) \leq E(|g(X)| \cdot 1) \leq \sqrt{E((g(X))^2)} \sqrt{E(1)} = \sqrt{E((g(X))^2)} = \sqrt{k}.$$

**Q 42.** Par linéarité et grâce à l'inégalité précédente ,

$$E((g(X) - m)^2) = E(g(X)^2) - 2mE(g(X)) + m^2 \geq k - 2m\sqrt{k} + m^2 = (\sqrt{k} - m)^2.$$

### III.C - Un lemme clé

**Q 43.** De la question Q39., on a  $P(|g(X) - m| \geq t) \leq 4\exp(-\frac{1}{8}t^2) = a\exp(-bt^2)$ , où on a posé  $a = 4$  et  $b = \frac{1}{8}$ .

$P(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) = P(|(g(X) - m) + \delta| \geq t)$  avec  $\delta = m - \sqrt{k}$ , or  $0 \leq |\delta| \leq \sqrt{32} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  grâce aux inégalités Q40 et Q42, ce qui aboutit à l'inégalité Q13 qui donne

$$P(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) = P(|(g(X) - m) + \delta| \geq t) \leq a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) = 4\exp(4)\exp(-\frac{1}{16}t^2).$$

**Q 44.**  $P(\|A_k\| - 1 > \varepsilon) = P(|g(X) - \sqrt{k}| > \varepsilon\sqrt{k})$  et l'inégalité précédente conduit à  $P(\|A_k\| - 1 > \varepsilon) \leq 4\exp(4)\exp(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2)$ , or  $\exp(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2) \leq \exp(-10\ln(\frac{1}{\delta})) = \delta^{10}$ , donc  $P(\|A_k\| - 1 > \varepsilon) \leq 4\exp(4)\delta^{10}$  et puisque  $4\exp(4)\delta^9 < \frac{4\exp(4)}{2^9} = \frac{\exp(4)}{2^7} \approx \frac{54,59}{128} < 1$ , ce qui entraîne l'inégalité.

### III.D - Conclusion

**Q 45.** On pose  $u = \frac{1}{\|v_i - v_j\|} (v_i - v_j)$ , alors  $\|u\| = 1$  et l'inégalité précédente donne

$$P(\overline{E_{i,j}}) = P(\|A_k\| - 1 > \varepsilon) < \delta.$$

**Q 46.**  $P\left( \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \overline{E_{i,j}} \right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(\overline{E_{i,j}}) \leq \delta \text{Card}(\{(i,j) \in [[1, N]] / 1 \leq i < j \leq N\}) = \frac{N(N-1)}{2} \delta$ , d'où

$$P\left( \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j} \right) = 1 - P\left( \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \overline{E_{i,j}} \right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2} \delta.$$

**Q 47.** Si on choisit  $\delta = \frac{1}{N^2}$ , alors  $P\left( \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j} \right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2N^2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , ce assure l'existence de

l'application  $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  qui répond à la question, où  $X = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$  une matrice de  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ , dont

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{k}\|u\|} Xu$$

les coefficients  $\varepsilon_{i,j}$  sont dans  $\{-1, 1\}$ .

Si on choisit  $\delta = \frac{1}{N^{10}}$ , alors  $P\left( \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j} \right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2N^{10}} \geq 1 - \frac{1}{2N^8} \geq 1 - \frac{1}{2^9} \approx 0,99$  voisin de 1,

donc  $\forall i \neq j$ ,  $P(E_{i,j}) \geq 0,99$ , donc l'événement  $E_{i,j}$  est presque sûr, mais ici  $k$  est plus grand ce qui n'est pas intéressant en pratique.