

Exercice 1

1. La condition d'appartenance de $M(z)$ à $\Gamma(E)$ s'écrit $\sum_{k=1}^n \frac{z - a_k}{|z - a_k|^2} = 0$, soit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = 0$,

ce qui est équivalent à $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = 0$.

2.a. On a $Q'(X) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} (X - a_j) \right)$. On en déduit que $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - a_k}$, ce qui est la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{Q'}{Q}$.

b. $M \in \Gamma(E) \iff R(z) = 0 \iff Q'(z) = 0$.

c. Le polynôme Q' , de degré $n-1$, a au plus $n-1$ racines. De plus, il est scindé sur \mathbb{C} (théorème de d'Alembert-Gauss), donc a au moins une racine. Finalement, $1 \leq \text{Card}(\Gamma(E)) \leq n-1$.

d. Si $E = \{a_1, a_2\}$, alors $Q(X) = (X - a_1)(X - a_2)$, $Q'(X) = 2X - (a_1 + a_2)$, donc $\Gamma(E) = \{I\}$, où I est le milieu du segment $[AB]$.

3. Soit r une rotation affine du plan P , notons ρ la rotation vectorielle associée, caractérisée par $\rho(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{r(A)r(B)}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $A'_k = r(A_k)$, ainsi $r(E) = \{A'_1, \dots, A'_n\}$.

Soit M' un point du plan P , soit $M = r^{-1}(M')$; alors, r étant une isométrie, on a $M'A'_k = MA_k$. En utilisant successivement la linéarité et l'injectivité de ρ , on a les équivalences

$$\begin{aligned} M' \in \Gamma(r(E)) &\iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{M'A'_k{}^2} \overrightarrow{M'A'_k} = \vec{0} \\ &\iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{MA_k{}^2} \rho(\overrightarrow{MA_k}) = \vec{0} \\ &\iff \rho\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{MA_k{}^2} \overrightarrow{MA_k}\right) = \vec{0} \\ &\iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{MA_k{}^2} \overrightarrow{MA_k} = \vec{0} \\ &\iff M \in \Gamma(E) \\ &\iff M' \in r(\Gamma(E)). \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $r(\Gamma(E)) = \Gamma(r(E))$.

4. Si $E = \{A_1, \dots, A_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier de centre Ω , alors $\Omega \in \Gamma(E)$ puisque $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{\Omega A_k} = \vec{0}$ et que les distances ΩA_k sont toutes égales. Par ailleurs, si r

est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, alors $r(E) = E$, donc $r(\Gamma(E)) = \Gamma(r(E)) = \Gamma(E)$. Si $\Gamma(E)$ contenait un autre point M , il contiendrait donc aussi les images itérées de M par r , soit n points distincts $M, r(M), \dots, r^{n-1}(M)$. On aurait alors $\text{Card}(\Gamma(E)) \geq n+1$, ce qui est impossible d'après 2.c.

5. Supposons $\Gamma(E) = \{\Omega\}$ avec Ω d'affixe ω . Le polynôme Q' est la dérivée d'un polynôme normalisé de degré n , il a donc pour terme dominant nX^{n-1} ; par ailleurs, sa seule racine dans \mathbb{C} est ω , donc $Q'(X) = n(X - \omega)^{n-1}$.

On en déduit que le polynôme Q est de la forme $Q(X) = (X - \omega)^n + C$, où $C \in \mathbb{C}$. Soit M un point d'affixe z , soit $M' = r(M)$ son image par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$: l'affixe de M' est $z' = \omega + e^{i\frac{2\pi}{n}}(z - \omega)$. On remarque que $(z' - \omega)^n = (z - \omega)^n$ donc $Q(z') = Q(z)$ et, les racines du polynôme Q étant exactement les affixes des points de E , $M \in E \iff r(M) \in E$. L'ensemble E est donc invariant par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$: c'est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier.

6.a. Ici, E est l'ensemble des trois sommets d'un triangle isocèle de sommet principal A_3 . On a $Q(X) = [(X - \alpha)^2 + \beta^2](X + 2\alpha)$, d'où $Q'(X) = 3X^2 - 3\alpha^2 + \beta^2$, d'où la discussion :

- si $\beta < \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E)$ est constitué des deux points de l'axe Ox d'affixes $\pm\sqrt{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{3}}$;
- si $\beta = \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E) = \{O\}$;
- si $\beta > \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E)$ est constitué des deux points de l'axe Oy d'affixes $\pm i\sqrt{\frac{\beta^2}{3} - \alpha^2}$.

On constate sur cet exemple que $\Gamma(E)$ est réduit à un point dans le seul cas où le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

b.i) L'ellipse (ε) a pour axe focal Ox , son demi-grand axe est $a = \alpha$, son demi-petit axe est $b = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$, la demi-distance focale est $c = OF = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{3}}$. Les foyers de (ε) sont donc exactement les deux points appartenant à $\Gamma(E)$.

ii) Un vecteur normal à (ε) en M_0 est $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(x_0, y_0)$ en notant $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{3y^2}{\beta^2}$, soit $\vec{n} \left(\frac{x_0}{\alpha^2}, \frac{3y_0}{\beta^2} \right)$. L'équation de la tangente en M_0 à (ε) est alors $\frac{x_0}{\alpha^2}(x - x_0) + \frac{3y_0}{\beta^2}(y - y_0) = 0$ ce qui, en tenant compte de $\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{3y_0^2}{\beta^2} = 1$, donne

$$\frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{3y_0 y}{\beta^2} - 1 = 0 .$$

iii) • Le milieu M_3 du côté $[A_1A_2]$ a pour affixe α , c'est aussi un des sommets de l'ellipse (ε) ; en ce point, la tangente à (ε) est dirigée selon Oy , c'est bien la droite (A_1A_2) .

• Le milieu M_2 du côté $[A_1A_3]$ a pour affixe $z_2 = -\frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta}{2}$. On vérifie (immédiat) que $M_2 \in (\varepsilon)$. La tangente (\mathcal{T}) à (ε) en M_2 a pour équation $-\frac{x}{2\alpha} + \frac{3y}{2\beta} - 1 = 0$. On vérifie que $A_1 \in (\mathcal{T})$, $A_3 \in (\mathcal{T})$, donc $(\mathcal{T}) = (A_1A_3)$.

• Par symétrie d'axe Ox , le milieu M_3 de $[A_1A_2]$ appartient à (ε) et la tangente à (ε) en ce point est (A_1A_2) .

Exercice 2

1. En choisissant des matrices élémentaires, par exemple $A = E_{11}$ et $B = E_{12}$, on a $AB = E_{12} \neq 0$ tandis que $BA = 0$. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E , l'axiome de séparation entraîne $\|AB\| \neq 0$ et $\|BA\| = 0$.

2. On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & (0) \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En jouant aux dominos avec

les matrices élémentaires, on obtient

$$XY = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) E_{11} + \sum_{j=2}^n \lambda_j E_{j1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$YX = \sum_{i=1}^n \lambda_i (E_{i1} + E_{i2} + \cdots + E_{in}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- 3.a. Avec (SN_1) , $q(0_E) = q(0 \cdot 0_E) = |0| \cdot q(0_E) = 0$ et $q(-A) = q((-1) \cdot A) = |-1| \cdot q(A) = q(A)$.
- b. On a $q(A) = q((A+B) - B) \leq q(A+B) + q(-B) = q(A+B) + q(B)$, d'où l'on déduit
(1) : $q(A) - q(B) \leq q(A+B)$. En échangeant les rôles de A et B , on obtient
(2) : $q(B) - q(A) \leq q(A+B)$. La conjonction des inégalités **(1)** et **(2)** donne enfin
 $|q(A) - q(B)| \leq q(A+B)$.
 Si $q(B) = 0$, alors $q(A) = |q(A)| = |q(A) - q(B)| \leq q(A+B) \leq q(A) + q(B) = q(A)$, donc
 $q(A+B) = q(A)$.
4. On sait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, d'où la propriété (P). Par ailleurs, f est à valeurs réelles positives, on a $f(\lambda A) = |\text{tr}(\lambda A)| = |\lambda \text{tr}(A)| = |\lambda| f(A)$ et enfin,

$$f(A+B) = |\text{tr}(A+B)| = |\text{tr}(A) + \text{tr}(B)| \leq |\text{tr}(A)| + |\text{tr}(B)| = f(A) + f(B),$$

donc f est une semi-norme sur E .

- 5.a. Si $i \neq j$, alors $q(E_{ij}) = q(E_{ii} E_{ij}) = q(E_{ij} E_{ii}) = q(0) = 0$.

- b. De la question 3.b., on déduit que, si q est une semi-norme sur E , alors l'ensemble $F = q^{-1}(\{0\}) = \{A \in E \mid q(A) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E . Dans le cas qui nous intéresse présentement, ce sous-espace F contient toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$, donc contient les combinaisons linéaires de ces matrices. Si $A \in E$, posons alors

$$A = B + C \text{ avec } B = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij} \text{ et } C = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}. \text{ Comme } B \in F, \text{ on a } q(B) = 0 \text{ donc}$$

$q(A) = q(C+B) = q(C)$, ce qu'il fallait prouver. Il en résulte que deux matrices qui ont les mêmes coefficients diagonaux ont la même image par q .

c. Soit $A = (a_{ij}) \in E$. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \left(\sum_{j=1}^n E_{ij} \right).$$

Les matrices A et M ont les mêmes coefficients diagonaux, donc $q(A) = q(M)$. Mais, avec les notations de la question 2. en posant $\lambda_i = a_{ii}$, on a aussi $M = YX$, donc

$$q(M) = q(YX) = q(XY). \text{ Or, } XY = \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } q(XY) = q((\text{tr } A) E_{11})$$

puisque ces deux matrices ont les mêmes coefficients diagonaux. Finalement,

$$q(A) = q(M) = q(YX) = q(XY) = q((\text{tr } A) E_{11}) = q(E_{11}) \cdot |\text{tr}(A)|.$$

Ceci étant valable pour toute matrice A , on a $q = \alpha f$, avec $\alpha = q(E_{11})$.

Exercice 3

1.a. Pour $k \geq 2$, on a $v_k = V_k - V_{k-1}$, ce qui permet de faire les manipulations suivantes (appelées **transformation d'Abel**) :

$$\begin{aligned} T_{n+p} - T_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\ &= \varepsilon_{n+p} V_{n+p} - \varepsilon_{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}). \end{aligned}$$

b. Si $p \geq 2$, de la question précédente et de l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\begin{aligned} |T_{n+p} - T_n| &\leq \varepsilon_{n+p} |V_{n+p}| + \varepsilon_{n+1} |V_n| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) |V_k| \\ &\leq M \left(\varepsilon_{n+p} + \varepsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \right) \\ &= M (\varepsilon_{n+p} + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}) = 2M \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

(on a tenu compte des conditions $\varepsilon_k \geq 0$ et $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \geq 0$ qui résultent des hypothèses de l'énoncé). La majoration demandée est par ailleurs évidemment vraie pour $p = 0$, et facile pour $p = 1$ puisque

$$|T_{n+1} - T_n| = \varepsilon_{n+1} |v_{n+1}| = \varepsilon_{n+1} |V_{n+1} - V_n| \leq \varepsilon_{n+1} (|V_{n+1}| + |V_n|) \leq 2M\varepsilon_{n+1} .$$

c. La suite (T_n) est de Cauchy : en effet, donnons-nous $\alpha > 0$. Comme la suite (ε_n) tend vers zéro, il existe un entier $N \geq 2$ tel que $n \geq N \implies 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\alpha}{2M}$. Si q et n sont deux entiers naturels tels que $q \geq n \geq N$, on pose alors $q = n + p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et la question précédente donne alors

$$|T_q - T_n| \leq 2M \varepsilon_{n+1} \leq 2M \varepsilon_{N+1} \leq \alpha .$$

La suite réelle (T_n) est donc convergente, ce qui signifie que la série $\sum_k \varepsilon_k v_k$ converge.

2.a.i) On a $U_n(x) = \text{Im } V_n(x)$, avec (somme partielle d'une série géométrique) :

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} .$$

Donc $|U_n(x)| = |\text{Im } V_n(x)| \leq |V_n(x)| = \frac{|1 - e^{inx}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$, mais

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) = e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin \frac{x}{2} \right) ,$$

donc $|1 - e^{ix}| = 2 \sin \frac{x}{2}$ puisqu'ici, $\sin \frac{x}{2}$ est positif.

ii) • Pour la convergence simple, fixons $x \in]0, 2\pi[$; on a $S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k v_k$, la suite (c_n) est décroissante de limite zéro, et la suite (v_n) définie par $v_n = \sin nx$ vérifie les hypothèses de la question **1.**, à savoir que la suite $(U_n(x))_{n \geq 1}$ de ses sommes partielles est bornée d'après la question précédente. On a ainsi montré la convergence de la suite numérique $(S_n(x))_{n \geq 1}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$, c'est-à-dire la convergence simple sur cet intervalle de la suite de fonctions (S_n) , ou encore de la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ en posant $f_k(x) = c_k \sin kx$.

• Fixons maintenant $\lambda \in]0, \pi[$ et plaçons-nous sur le segment $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$. Remarquons d'abord que, pour $x \in I_\lambda$, on a $0 < \sin \frac{\lambda}{2} \leq \sin \frac{x}{2}$. De la question **1.b.**, on déduit la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I_\lambda \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} c_{n+1} \leq \frac{2}{\sin \frac{\lambda}{2}} c_{n+1} .$$

On sait déjà que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I_λ vers une fonction S , on peut donc passer à la limite ($p \rightarrow +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I_\lambda$ fixés) et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I_\lambda \quad |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\sin \frac{\lambda}{2}} c_{n+1} ,$$

d'où $\|S - S_n\|_\infty = \sup_{x \in I_\lambda} |S(x) - S_n(x)|$ tend vers zéro, ce qui traduit la convergence uniforme

de la suite de fonctions (S_n) , ou de la série de fonctions $\sum f_k$, sur le segment I_λ . Cette suite de fonctions converge donc uniformément sur tout segment de l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$.

b.i) Notons S la fonction limite (supposée uniforme) de la suite de fonctions (S_n) sur $[0, 2\pi]$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour

$n \geq N$, on ait $\|S - S_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire tel que

$$n \geq N \implies \forall x \in [0, 2\pi] \quad |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n \geq N$, a fortiori $2n \geq N$, donc $\left|S\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left|S\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

De l'inégalité triangulaire, on tire alors $\left|S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \varepsilon$. On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] = 0.$$

ii) On a $S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ mais, pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on a

$c_k \geq c_{2n} \geq 0$ et $\frac{\pi}{4} \leq \frac{k\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right) \geq \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geq n \frac{\sqrt{2}}{2} c_{2n} \geq 0.$$

Le théorème d'encadrement gendarmesque donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n c_{2n} = 0$.

De $0 \leq c_{2n+1} \leq c_{2n}$, on déduit que l'on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n c_{2n+1} = 0$. Il est immédiat d'en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n c_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) c_{2n+1} = 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n c_n = 0$ puisque les termes pairs et les termes impairs tendent tous deux vers zéro.

3.a. Faire une étude de la fonction $x \mapsto x - \sin x$ pour montrer qu'elle est positive sur \mathbb{R}_+ . Un argument de parité donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

La concavité de la fonction sinus sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne l'inégalité $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$ sur cet intervalle (*la courbe est au-dessus de sa corde*).

b. Notons que l'entier N de l'énoncé est la partie entière du réel $\frac{\pi}{x}$.

• On va montrer un peu mieux que ce qui est demandé, à savoir que l'on a $0 \leq \sigma_n(x) \leq \pi$ pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N$. En effet, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $0 \leq kx \leq Nx \leq \pi$, donc $\sin kx \geq 0$: le réel $\sigma_n(x)$ est une somme de termes positifs, donc $\sigma_n(x) \geq 0$. De plus,

$\sin kx \leq kx$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc, en sommant, on a $\sigma_n(x) \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{k} = nx \leq Nx \leq \pi$.

• Le réel $x \in]0, \pi[$ étant toujours fixé, on sait que $\left|\sum_{k=1}^n \sin kx\right| = |U_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ d'après la question **2.a.i)**. De la question **1.b.**, on tire alors la majoration

$$\left| \sum_{k=N+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{2}{(N+1) \sin \frac{x}{2}}. \text{ Or, } \frac{x}{2} \text{ est dans l'intervalle }]0, \frac{\pi}{2}[, \text{ donc } \sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}, \text{ puis}$$

$$\left| \sum_{k=N+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{2}{(N+1) \frac{x}{\pi}} = \frac{2\pi}{(N+1)x} \leq 2$$

car $\pi \leq (N+1)x$ par définition de l'entier N .

c. Il y a différents cas à étudier, commençons par les plus simples :

- si $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, alors $\sigma_n(x) = 0$ pour tout entier $n \dots$
- si $x \in]0, \pi[$, posons $N = E\left(\frac{\pi}{x}\right)$ comme à la question précédente :
 - ▷ si $1 \leq n \leq N$, on a vu que $0 \leq \sigma_n(x) \leq \pi$, ce qui est suffisant ;
 - ▷ si $n > N$, on écrit $\sigma_n(x) = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^n \frac{\sin kx}{k}$; la question précédente et l'inégalité

triangulaire permettent de conclure.

- si $x \in]\pi, 2\pi[$, posons $y = 2\pi - x$; on a $y \in]0, \pi[$, donc $|\sigma_n(y)| \leq \pi + 2$ par ce qui précède, et enfin $\sigma_n(x) = -\sigma_n(y)$ d'où la conclusion.

d. Écrivons $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (k c_k) \frac{\sin kx}{k}$. Pour $x \in [0, 2\pi]$ fixé, la question 1.c. assure la convergence de la suite numérique $(S_n(x))_{n \geq 1}$ vers un réel $S(x)$, puisque la suite $(n c_n)$ converge vers zéro en décroissant, et que la suite de terme général $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ est bornée (valeur absolue majorée par $\pi + 2$). On a ainsi prouvé la convergence simple de la suite de fonctions (S_n) sur $[0, 2\pi]$.

La question 1.b. donne plus précisément la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq 2(\pi + 2)(n+1)c_{n+1}.$$

Comme en 2.a.ii), on passe à la limite ($p \rightarrow +\infty$, n et x fixés) et on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad |S(x) - S_n(x)| \leq 2(\pi + 2)(n+1)c_{n+1},$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite de fonctions (S_n) , ou de la série de fonctions $\sum_k f_k$, sur $[0, 2\pi]$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)c_{n+1} = 0$.

4.a. La suite (c_n) est décroissante et tend vers zéro, donc (question 2.a.ii) la suite de fonctions

(S_n) , avec $S_n(x) = 2 \sin x + \sum_{k=2}^n \frac{\sin kx}{k \ln k}$, converge simplement sur $]0, 2\pi[$, uniformément sur

tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$. La suite $(n c_n)$ est aussi décroissante et tend vers zéro, donc (question 3.d.) il y a convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$, puis convergence uniforme sur

\mathbb{R} par périodicité. Posons $S(x) = 2 \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}$.

b. La fonction somme S est continue (comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément) sur \mathbb{R} , et 2π -périodique. Elle est impaire, les coefficients de Fourier a_n ($n \in \mathbb{N}$) sont donc nuls. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(2 \sin x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k \ln k} \right) \sin nx \, dx .$$

La convergence uniforme de la série de fonctions sur le segment $[0, \pi]$ permet d'intégrer terme à terme (intersion série-intégrale), ce qui donne

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(2 \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k} \int_0^\pi \sin kx \sin nx \, dx \right) .$$

Les propriétés d'orthogonalité des fonctions $x \mapsto \sin kx$ dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0, \pi])$ donnent $b_1 = 2$ et $b_n = \frac{1}{n \ln n}$ pour $n \geq 2$, soit $b_n = c_n$.