

Corrigé du concours Mines Ponts 2013 - Maths 1

A. Formes bilinéaires plates

Q1. **L'unicité.** Supposons qu'ils existent $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété, alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle u(x), y \rangle = \langle v(x), y \rangle$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) = v(x)$, donc $u = v$.

L'existence. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $\delta_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

L'application $\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*, x \longmapsto \delta_x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe alors un unique vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie, $\varphi_x = \delta(u(x)) = \delta_{u(x)}$, alors

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

$\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, c'est facile de vérifier que l'application u ainsi définie est un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, donc $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$, alors u est symétrique, et u est orthogonalement diagonalisable, il existe $\beta(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u , posons $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$, alors

$\varphi(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{i,j}$, donc φ est diagonalisable.

Q2. Pour $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(x + \lambda x', y) &= a(x + \lambda x')b(y) \\ &= a(x)b(y) + \lambda a(x')b(y) \\ &= (a \otimes b)(x, y) + \lambda(a \otimes b)(x', y) \end{aligned}$$

De même pour la linéarité à droite.

$(a \otimes b)$ est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, a(x)b(y) = a(y)b(x)$.

Montrons que $(a \otimes b)$ est symétrique $\iff$ la famille (a, b) est liée.

$\Leftarrow$ C'est évident.

$\implies$ Si $a = \theta$ ou $b = \theta$ la famille (a, b) est liée.

Si $a \neq \theta$ et $b \neq \theta$, alors $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(y) \neq 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, a(x) = \frac{a(y)}{b(y)}b(x)$

Alors $\exists \lambda = \frac{a(y)}{b(y)} \in \mathbb{R}$ tel que : $a = \lambda b$.

La famille (a, b) est donc liée.

Q3. On prend la base de diagonalisation de la question 1, et on peut supposer que $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \text{diag}(\lambda_1, 0, \dots, 0)$ avec $\lambda_1 \neq 0$.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)_\beta$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_\beta$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) \\ &= \lambda_1 x_1 y_1 \end{aligned}$$

Soit $\beta^*(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de la base $\beta(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $\lambda_1 > 0$, on prend $f = \sqrt{\lambda_1} e_1^*$ et $\varphi = f \otimes f$.

Si $\lambda_1 < 0$, on prend $f = \sqrt{-\lambda_1} e_1^*$ et $\varphi = -f \otimes f$.

Q4. Pour $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$, ici $\langle, \rangle$ désigne le produit usuel dans $\mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x, y), \varphi(z, w) \rangle &= \varepsilon^2 (f \otimes f)(x, y) \cdot (f \otimes f)(z, w) \\ &= f(x)f(y)f(z)f(w) \\ &= f(x)f(w)f(z)f(y) \\ &= \langle \varphi(x, w), \varphi(z, y) \rangle\end{aligned}$$

Q5. Toujours avec les notations des questions précédentes, pour tout $i \neq 1$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi(e_1, e_1), \varphi(e_i, e_i) \rangle &= [\varphi(e_1, e_i)]^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\varphi(e_i, e_i) = 0$ car $\varphi(e_1, e_1) = \lambda_1 \neq 0$, alors $\text{rg}(\varphi(e_i, e_j)_{1 \leq i, j \leq n}) = 1$.

B. Diagonalisation simultanée

Q6. $i_0 \in I$, si u_{i_0} n'est pas une homothétie, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u_{i_0} - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n} \neq 0$, donc

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u_{i_0}), \ker(u_{i_0} - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \neq \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $j \in I$, les endomorphismes u_{i_0} et u_j commutent, donc les espaces propres de u_{i_0} sont stables par u_j .

Q7. Si tous les endomorphismes u_i avec $i \in I$ sont des homothéties alors n'importe quelle base de E convient.

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$, tel que u_{i_0} n'est pas une homothétie, u_{i_0} est auto-adjoint donc

(*) $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_{i_0})} E_\lambda(u_{i_0}) = E$, et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u_{i_0}), \dim(E_\lambda(u_{i_0})) < n$ et cette somme est orthogonale.

Par application de l'hypothèse de récurrence sur chaque $E_\lambda(u_{i_0})$, il existe une base orthonormée β_λ de $E_\lambda(u_{i_0})$ qui diagonalise tous les $u'_j =$ la restriction de u_j sur $E_\lambda(u_{i_0})$, pour tout $j \in I$, car $(u'_j)_{j \in I}$ est une famille d'endomorphismes autoadjoints et commutent.

La somme (*) est orthogonale, donc $\beta = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(u_{i_0})} \beta_\lambda$ est une base orthonormée de E , qui

diagonalise tous les u_j , avec $j \in I$

C. Vecteurs réguliers

Q8. Supposons que B est inversible alors,

$$\begin{aligned}\det(A + tB) &= \det B \det(B^{-1}A + tI_n) \\ &= (\det B) \chi_{B^{-1}A}(-t)\end{aligned}$$

$\chi_{B^{-1}A}$ désigne le polynôme caractéristique de $B^{-1}A$.

Donc $A + tB$ est inversible si et seulement si $-t \notin \text{Sp}(B^{-1}A)$, l'ensemble $\text{Sp}(B^{-1}A)$ est évidemment fini.

Supposons que A est inversible alors pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}\det(A + tB) &= \det A \det(I_n + tA^{-1}B) \\ &= (\det A) t^n \chi_{A^{-1}B}(-1/t)\end{aligned}$$

Donc $A + tB$ est inversible si et seulement si $(t \neq 0 \text{ et } -1/t \notin \text{Sp}(B^{-1}A)) \text{ ou } t = 0$.

Q9. La famille $(a_1, \dots, a_r)$ est libre de $\mathbb{R}^p$, par application du théorème de la base incomplète, il existe une famille $(a_{r+1}, \dots, a_p)$ telle que $(a_1, \dots, a_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^p$, posons β la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $A = \text{mat}_\beta(a_1, \dots, a_p)$ et $B = \text{mat}_\beta(b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0)$.

La matrice A est inversible. Par application de la question précédente $A + tB$ est inversible pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t .

Par conséquent $(a_1 + tb_1, \dots, a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t .

Q10. $\dim \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v) = q$, il existe $(e_1, \dots, e_q) \in \mathbb{R}^n$ telle que $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q))$ soit une base de $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$.

Supposons que le vecteur $\varphi(x, y) \notin \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$, alors la famille $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q), \varphi(x, y))$ est libre. Par application de la question précédente :

la famille $(\tilde{\varphi}(v)(e_1) + t\varphi(x, e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q) + t\varphi(x, e_q), \varphi(x, y) + t \cdot 0)$ est libre pour t voisin de 0 .

c'est à dire $(\varphi(v + tx, e_1), \dots, \varphi(v + tx, e_q), \varphi(x, y))$ est libre pour t voisin de 0 .

Alors $(\varphi(\frac{1}{t}v + x, e_1), \dots, \varphi(\frac{1}{t}v + x, e_q), \frac{1}{t}\varphi(x, y))$ est libre pour t voisin de 0 .

Par conséquent puisque $y \in \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$ c'est à dire $\varphi(v, y) = 0 = \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right)$, la famille

$$\left(\varphi\left(\frac{1}{t}v + x, e_1\right), \dots, \varphi\left(\frac{1}{t}v + x, e_q\right), \frac{1}{t}\varphi(x, y) + \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right)\right)$$

est libre pour t voisin de 0 .

Puisque $\frac{1}{t}\varphi(x, y) + \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right) = \varphi\left(x + \frac{1}{t}v, \frac{1}{t}y\right)$, alors

La famille $(\varphi(\frac{1}{t}v + x, e_1), \dots, \varphi(\frac{1}{t}v + x, e_q), \varphi(x + \frac{1}{t}v, \frac{1}{t}y))$ d'éléments de $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(\frac{1}{t}v + x)$ est libre de cardinale $q + 1$, absurde avec la définition de q .

Donc $\forall y \in \ker \tilde{\varphi}(v), \varphi(x, y) \notin \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$

Q11. Soit $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x \in \ker \varphi &\implies \forall y \in \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = 0 \\ &\implies \varphi(v, x) = 0 \\ &\implies \tilde{\varphi}(v)(x) = 0 \\ &\implies x \in \ker \tilde{\varphi}(v) \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi) \subset \ker \tilde{\varphi}(v)$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, de la question 10.

$$\begin{aligned} y \in \ker \tilde{\varphi}(v) &\implies \varphi(x, y) \in \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v) \\ &\implies \exists x' \in \mathbb{R}^n / \varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(v)(x') \end{aligned}$$

Supposons que $y \in \ker \tilde{\varphi}(v)$, alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle \varphi(x, y), \varphi(v, x') \rangle \\ &= \langle \varphi(x, x'), \varphi(v, y) \rangle \\ &= 0 \text{ car } y \in \ker \tilde{\varphi}(v) \end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(x, y)\| = 0$ c'est à dire que $\varphi(x, y) = 0$, alors $y \in \ker \varphi$

Donc $\ker \tilde{\varphi}(v) \subset \ker \varphi$, alors $\ker \tilde{\varphi}(v) = \ker \varphi$

Si $\ker \varphi = \{0\}$, alors $\ker \tilde{\varphi}(v) = \{0\}$.

$\dim \ker \tilde{\varphi}(v) + \dim \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v) = n$ entraîne $n = \dim \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$ et $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v) \subset \mathbb{R}^p$, alors $n \leq p$.

Q12. Soit $v \in \mathcal{V}$, posons $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v) = \operatorname{vect}(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q))$

Donc la famille $(\varphi(v, e_1), \dots, \varphi(v, e_q))$ est libre de $\mathbb{R}^p$, soit $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|u\| = 1$, de la question 9. la famille $(\varphi(v, e_1) + t\varphi(u, e_1), \dots, \varphi(v, e_q) + t\varphi(u, e_q)) = (\varphi(v + tu, e_1), \dots, \varphi(v + tu, e_q))$ est libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t .

Alors la famille $(\tilde{\varphi}(v + tu)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v + tu)(e_q))$ de $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v + tu)$ est libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t .

Par conséquent $v + tu \in \mathcal{V}$ pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t , donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(v, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$.

L'ensemble $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Q13. Avec les notations de la question 12. $\text{Im}\tilde{\varphi}(v) = \text{vect}(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q))$

Alors pour tout $t \neq 0$, la famille $(\tilde{\varphi}(tv)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(tv)(e_q))$ est libre de $\text{Im}\tilde{\varphi}(v)$ car φ est bilinéaire.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, par application de la question 9.

la famille $(\varphi(tv, e_1) + t'\varphi(u, e_1), \dots, \varphi(tv, e_q) + t'\varphi(u, e_q)) = (\varphi(tv + t'u, e_1), \dots, \varphi(tv + t'u, e_q))$ est libre pour tout réel t' sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t' , comme elle est de cardinal q alors $tv + t'u \in \mathcal{V}$

De plus $\|tv + t'u - u\| \leq |t| \|v\| + |t' - 1| \|u\|$ cette dernière quantité tend vers 0 lorsque t est proche de 0 et t' est proche de 1.

L'ensemble $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul

Q14. Si $\ker \varphi = \{0\}$ alors $\ker \tilde{\varphi}(v) = \{0\}$ c'est la question 11.

Donc $\dim \text{Im}\tilde{\varphi}(v) = n$, l'application $\tilde{\varphi}(v)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, qui est surjectif, il est donc bijectif.

$\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q15. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\exists z' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{\varphi}(v)(z') = z$.

$$\begin{aligned} \langle \psi(x)(y), z \rangle &= \langle \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}(y), z \rangle \\ &= \langle \varphi(x, \tilde{\varphi}(v)^{-1}(y)), z \rangle \\ &= \langle \varphi(x, \tilde{\varphi}(v)^{-1}(y)), \varphi(v, z') \rangle \\ &= \langle \varphi(x, z'), \varphi(\tilde{\varphi}(v)^{-1}(y), v) \rangle \text{ car } \varphi \text{ est plate} \\ &= \langle \varphi(x, z'), \tilde{\varphi}(v) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}(y) \rangle \\ &= \langle \varphi(x, z'), y \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle y, \psi(x)(z) \rangle &= \langle y, \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(v)(z) \rangle \\ &= \langle y, \tilde{\varphi}(x)(z') \rangle \\ &= \langle y, \varphi(x, z') \rangle \end{aligned}$$

Conclusion $\langle y, \psi(x)(z) \rangle = \langle \psi(x)(y), z \rangle$ et $\psi(x)$ est auto-adjoint.

Q16. Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}^n$, Montrons que

$$\langle \psi(x) \circ \psi(y)(t), z \rangle = \langle \psi(y) \circ \psi(x)(t), z \rangle$$

En posant $\tilde{\varphi}(v)^{-1}(t) = t'$, $\tilde{\varphi}(v)^{-1}(z) = z'$

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) \circ \psi(y)(t), z \rangle &= \langle \psi(y)(t), \psi(x)z \rangle \text{ car } \psi(x) \text{ est auto-adjoint} \\ &= \langle \tilde{\varphi}(y)(t'), \tilde{\varphi}(x)(z') \rangle \\ &= \langle \varphi(y, t'), \varphi(x, z') \rangle \\ &= \langle \varphi(y, z'), \varphi(x, t') \rangle \text{ car } \varphi \text{ est plate} \\ &= \langle \psi(y)(z), \psi(x)(t) \rangle \\ &= \langle z, \psi(y) \circ \psi(x)(t) \rangle \text{ car } \psi(y) \text{ est auto-adjoint} \\ &= \langle \psi(y) \circ \psi(x)(t), z \rangle \text{ car } \langle, \rangle \text{ est un produit scalaire} \end{aligned}$$

Alors

$$\psi(x) \circ \psi(y) = \psi(y) \circ \psi(x)$$

La famille $\psi(x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ d'endomorphismes de l'espace euclidien autoadjoints qui commutent, donc par application de la question 7. il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

Q17. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant celle de la question 16., posons pour tout $i \in \{1, \dots, n\} : e'_i = \tilde{\varphi}(v)(e_i)$.

La famille $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, car $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Montrons que la base $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ diagonalise φ .

Soient $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}\varphi(e'_i, e'_j) &= \tilde{\varphi}(e'_i)(e'_j) \\ &= \tilde{\varphi}(e'_i) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}(e_j) \\ &= \psi(e'_i)(e_j)\end{aligned}$$

ce dernier vecteur est colinéaire à e_j

D'autre part

$$\begin{aligned}\varphi(e'_j, e'_i) &= \tilde{\varphi}(e'_j)(e'_i) \\ &= \tilde{\varphi}(e'_j) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}(e_i) \\ &= \psi(e'_j)(e_i)\end{aligned}$$

Ce dernier vecteur est colinéaire à e_i

Mais $\varphi(e'_j, e'_i) = \varphi(e'_i, e'_j)$ car φ est symétrique et la famille (e'_i, e'_j) est libre donc le vecteur $\varphi(e'_i, e'_j)$ est nul.

Conclusion : la base $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ diagonalise φ .

Je tiens à remercier l'élève Ibrahim Benjelloun du lycée My Driss Fès qui a donné son aide pour la réalisation de ce document

sadikoulmeki@yahoo.fr