

I.1. Fonction E .

- a. Pour tout réel x , il vient $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k! n!} \right)$. Cette égalité est vraie en particulier pour $|x|$ ce qui prouve que la famille $\left(\frac{(kx)^n}{k! n!} \right)_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est sommable et le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}. \quad \text{CQFD.}$$

- b. L'unicité du développement en série entière qui est celui de Mac-laurin fournit $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$. CQFD.

- c. Il vient $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{k!} C_n^p k^p \right)$. La famille $\left(\frac{1}{k!} C_n^p k^p \right)_{(k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_n}$ étant positive, elle est donc sommable et là encore Fubini fournit $A_{n+1} = \sum_{p=0}^n C_n^p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{k!}$ i.e. $A_{n+1} = \sum_{p=0}^n C_n^p A_p$.

Ainsi la suite (A_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (B_n) avec $A_0 = A_1 = e$. Une itération immédiate prouve alors que $A_n = eB_n$. CQFD.

I.2. Comparaison de sommes infinies.

- a. Comme $u_k > 0$ pour tout k , $R_{p,n} \neq 0$ et $\frac{U_n}{R_{p,n}} = 1 + \alpha(p, n)$ avec $\alpha(p, n) = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n}{\sum_{k=p}^{+\infty} u_k k^n}$.
Or $0 \leq \sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n \leq \tilde{u}_p (p-1)^n$ avec $\tilde{u}_p = \max \{u_1, u_2, \dots, u_{p-1}\}$ et
 $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k k^n \geq u_p p^n$ donc $0 \leq \alpha(p, n) \leq \frac{\tilde{u}_p}{u_p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^n$ donc, pour $p \geq 1$ fixé quelconque, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(p, n) = 0$.
Ainsi $U_n \sim R_{p,n}$ pour $p \geq 1$ fixé quelconque lorsque n tend vers $+\infty$. CQFD.

- b. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé quelconque. Il existe p_0 tel que $(1 - \varepsilon)u_k \leq v_k \leq (1 + \varepsilon)u_k$ pour $k \geq p_0$.
Il en découle, avec des notations claires, $(1 - \varepsilon)R_{p_0,n}(u) \leq R_{p_0,n}(v) \leq (1 + \varepsilon)R_{p_0,n}(u)$.
Or $U_n \sim R_{p_0,n}(u)$ d'après la question précédente.
Donc il existe n_0 tel que $(1 - \varepsilon)U_n \leq R_{p_0,n}(u) \leq (1 + \varepsilon)U_n$ pour $n \geq n_0$.
Il en découle $(1 - \varepsilon)^2 U_n \leq R_{p_0,n}(v) \leq (1 + \varepsilon)^2 U_n$ pour $n \geq n_0$.
Ainsi $U_n \sim R_{p_0,n}(v)$. Or $R_{p_0,n}(v) \sim V_n$ d'après la question précédente. Donc $U_n \sim V_n$. CQFD.

I.3. Fonction f_n .

- a. $x^2 f_n(x) = \exp(-x \ln x + x + (n + 3/2) \ln x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f_n(k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$ converge. CQFD.
- b. D'après la formule de Stirling, $\frac{1}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-k \ln k + k - 1/2 \ln k)$ donc d'après la question I.2.b. :
 $A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \exp(-k \ln k + k - 1/2 \ln k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$. CQFD.

II.1. Étude de la fonction ϕ_λ .

- a. Au voisinage de 0, $\phi_\lambda(x) \sim \lambda \ln x$ et, au voisinage de $+\infty$, $\phi_\lambda(x) \sim -x \ln x$.
- b. $\phi'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} - \ln x$ et $\phi''_\lambda(x) = -\frac{\lambda + x}{x^2}$ donc ϕ'_λ décroît sur $]0, +\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$ et partant s'annule en un unique réel μ racine de l'équation $x \ln x - \lambda = 0$.
Ainsi ϕ_λ croît sur $]0, \mu[$ de $-\infty$ à $\phi_\lambda(\mu)$ puis décroît sur $]\mu, +\infty[$ vers $-\infty$. CQFD.
- c. Dans la suite on note $h(x) = x \ln x$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et $h'(x) = 1 + \ln x > 0$. Donc h réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
Ainsi $\varphi = h^{-1}$ est-elle bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. CQFD.

II.2. Maximum de la fonction f_n .

- a. Pour $x > 0$ on a $f_n(x) = \exp\left(\phi_{n-1/2}(x)\right)$ de sorte que, sur $]0, +\infty[$, f_n admet un maximum en un unique point $\mu_n = \varphi(n - 1/2)$, maximum strictement positif. C'est également le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est nulle sur $]-\infty, 0]$.
Ainsi f_n admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en le réel $\mu_n = \varphi(n - 1/2)$. CQFD.

f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_n(x) = 0$. Donc, d'après le théorème de prolongement des applications $\mathcal{C}^1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_n(x) = 0$.

Pour $x > 0$ il vient $f'_n(x) = \phi'_\lambda(x) \exp(\phi_\lambda(x))$ avec $\lambda = n - 1/2$. Or au voisinage de 0^+ , $\phi'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} - \ln x \sim \frac{\lambda}{x}$ et $\phi_\lambda(x) = \lambda \ln x + o(1)$ donc $\exp(\phi_\lambda(x)) \sim \exp(\lambda \ln x) = x^\lambda$ donc $f'_n(x) \sim \lambda x^{\lambda-1}$ tend vers 0 si et seulement si $\lambda - 1 = n - 3/2 > 0$ soit si et seulement si $n \geq 2$.

Ainsi f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \geq 2$. CQFD.

- b. On a vu que $\mu_n = \varphi(n - 1/2)$ c'est à dire que μ_n est caractérisé par $h(\mu_n) = n - 1/2$ avec $h(x) = x \ln x$ strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Ainsi $h(\mu_1) = 1/2$ et $h(\mu_2) = 3/2$. Or $h(1) = 0$ et $h(2) = 2 \ln 2 \in]1/2, 3/2[$ donc $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$. CQFD.

- De même pour établir que $\sqrt{n} < \mu_n < n$ pour $n \geq 3$, il suffit de prouver que $\frac{1}{2}\sqrt{n} \ln n < n - \frac{1}{2} < n \ln n$ (1).

Soit $\Delta(x) = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \ln x$. Il vient que $\Delta'(x)$ est du signe de $4\sqrt{x} - \ln x - 2$ dont le minimum est atteint en $1/4$ et vaut $\ln 4 > 0$ par une étude immédiate. Donc Δ croît et comme $\Delta(1) = 1/2 > 0$ il vient que l'inégalité de gauche de (1) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Soit désormais $\delta(x) = x \ln x - x + 1/2$. Comme $\delta'(x) = \ln x$, δ croît sur $[1, +\infty[$. Or $\delta(3) = 3 \ln 3 - 5/2 > 0$ car $\ln 3 > 5/6$ puisque $3 > e$. Ce qui établit l'inégalité de droite de (1) pour $n \geq 3$. CQFD.

- De $\mu_n \ln \mu_n = n - 1/2$ on tire $\frac{\mu_n}{n} = \frac{1 - 1/2n}{\ln \mu_n} \sim \frac{1}{\ln \mu_n}$ tend vers 0 car $\mu_n \geq \sqrt{n}$. Ainsi $\mu_n = o(n)$. CQFD.
- Nous avons $\mu_n \sim \frac{n}{\ln \mu_n}$ donc pour n assez grand $\mu_n \geq \frac{n}{2 \ln \mu_n}$. Or $\ln \mu_n \leq \ln n$ puisque $\mu_n < n$. Donc $\mu_n \geq \frac{n}{2 \ln n}$ pour n assez grand donc $n^\alpha = o(\mu_n)$ pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$. CQFD.

III.1. Propriétés de la fonction g_n .

- a. Vérification immédiate à partir de la définition de g_n .

- b. En II.2.a. est indiquée l'allure du graphe de f_n . Il en découle celui de g_n : fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $] - \infty, \sqrt{n}]$, croissante sur $[\sqrt{n}, 0]$ puis décroissante vers 0 sur $]0, +\infty[$. La maximum atteint en 0 a pour valeur 1.

- c. D'après la relation admise en II.1. dans l'énoncé avec $\lambda = n - 1/2$ et compte tenu de $f_n(x) = \exp(\phi_{n-1/2}(x))$ pour $x > 0$, il vient que :

$$g_n(x) = \exp\left((\mu_n - (n - 1/2))\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ pour } x > -\sqrt{n} \text{ et } g_n(x) = 0 \text{ sinon.} \quad (2).$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x > -\sqrt{n}$ et donc $g_n(x)$ admet la première expression ci-dessus.

Or $\mu_n = o(n)$ donc $\mu_n - (n - 1/2) \sim -n$ et $\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{x^2}{2n}$.

Il en découle que $(\mu_n - (n - 1/2))\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$ tend vers $-\frac{x^2}{2}$.

Par ailleurs $\mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{\mu_n}{n} x^2$ tend vers 0 car $\mu_n = o(n)$.

Ainsi la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par $g(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$. CQFD.

- d. Fixons $x > -\sqrt{n}$. On remarque que, x positif ou négatif, on a toujours $\mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq 0$ et partant, d'après

(2) ci-dessus, $g_n(x) \leq \exp\left((\mu_n - (n - 1/2))\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$ et cela pour tout entier n et tout réel $x > -\sqrt{n}$.

Or $\mu_n = o(n)$ donc, pour n assez grand, $\mu_n - (n - 1/2) \leq -\frac{n}{2}$.

Il en découle qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$ pour tout réel $x > -\sqrt{n}$. CQFD.

III.2. Une majoration de la fonction g_n .

- a. u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - 1, +\infty[\setminus \{0\}$ et au voisinage de 0, $u(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + O(x^2)$ ce qui prouve que u est dérivable en 0 de nombre dérivé $-\frac{1}{3}$.

Il vient que, pour $x \neq 0$, $u'(x) = \frac{v(x)}{x^3}$ avec $v(x) = -\frac{x^2 + 2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$. Or $v'(x) = -\frac{x^2}{(1+x)^2}$ donc v décroît sur $] -1, +\infty[$. Or $v(0) = 0$ donc $v(x) > 0$ pour $x < 0$ et $v(x) < 0$ pour $x > 0$. Il en découle que $u'(x) < 0$ pour tout $x > -1$, $x \neq 0$. (Et également en 0 puisque $u'(0) = -1/3$).

En conclusion u est décroissante et positive car $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$. CQFD.

b. Soit $n \geq n_0$ fixé quelconque, n_0 entier introduit précédemment.

Pour tout $x > -\sqrt{n}$ on a $g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})\right)\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$ d'après la question III.1.d.

- Si $x \in]-\sqrt{n}, 0]$ il vient que $u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq u(0) = \frac{1}{2}$ puisque u décroît donc $g_n(x) \leq \exp(-\frac{x^2}{4})$.

Cette majoration est encore vraie si $x \leq -\sqrt{n}$ puisqu'alors $g_n(x) = 0$.

En conclusion $g_n(x) \leq \exp(-\frac{x^2}{4})$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \leq 0$. CQFD.

- Si $x \geq 0$ il vient $u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq u(x)$ puisque u décroît. Il en découle $g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}u(x)\right)$.

En d'autres termes $g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right) = \sqrt{1+x} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \geq 0$. CQFD.

IV.1. Intégrabilité de la fonction g_n .

- Soit $n \geq 1$ fixé quelconque. f_n est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable en $-\infty$ puisque nulle pour $x \leq 0$. En outre $x^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc f_n est intégrable en $+\infty$ et finalement f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $x \rightarrow \mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ prouve alors, d'après la définition de g_n donnée au début de la troisième partie, que g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. CQFD.

- Notons ℓ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = \exp(-\frac{x^2}{4})$ pour $x \leq 0$ et $\ell(x) = \sqrt{1+x} \exp(-\frac{x}{2})$ sinon.

ℓ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\ell(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Par ailleurs ℓ domine la suite (g_n) sur $\mathbb{R}$ d'après la question III.2.b.

Ainsi la suite (g_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue g et qui est dominée sur $\mathbb{R}$ par la fonction ℓ intégrable. D'après le théorème de la convergence dominée, la suite

$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$ (intégrale de Gauss). CQFD.

IV.2. Un encadrement de la somme S_n .

Sur $[0, +\infty[$ la fonction positive f_n croît entre 0 et μ_n puis décroît. Il en découle classiquement que :

$$\int_0^p f_n \leq \sum_{k=1}^p f_n(k) \leq f_n(p) + \int_0^p f_n \quad \text{et} \quad \int_{p+1}^{+\infty} f_n \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leq f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n.$$

Donc par addition, vu que $\int_0^{+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f_n$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leq S_n \leq f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leq f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n \quad (3).$$

Or $f_n(x) = f_n(\mu_n)g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\right)$ d'après la question III.1.a. de sorte que $\int_{\mathbb{R}} f_n = f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} g_n$.

Par ailleurs $\int_p^{p+1} f_n \leq f_n(\mu_n)$ ainsi que $f_n(p) \leq f_n(\mu_n)$ et $f_n(p+1) \leq f_n(\mu_n)$ puisque $f_n(\mu_n)$ est le maximum de la fonction f_n .

Il découle alors de (3) que $f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n - f_n(\mu_n) \leq S_n \leq f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n + 2f_n(\mu_n)$ (4).

Posons $K_n = f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ et $\varepsilon_n = 2\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}$ qui tend bien vers 0 d'après la question II.2.b.iii.

L'inégalité (4) ci-dessus permet alors d'écrire $K_n(I_n - \varepsilon_n) \leq S_n \leq K_n(I_n + \varepsilon_n)$. CQFD.

IV.3. Un équivalent du réel B_n .

D'après les questions I.1.c. et I.3.b. on a $B_n \sim \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_n$.

Or $S_n \sim \sqrt{2\pi} K_n$ d'après la question précédente et le fait que I_n tend vers $\sqrt{2\pi}$ (question IV.1.).

Ainsi $B_n \sim \frac{1}{e} K_n$. CQFD.

————— *FIN* —————