

Corrigé de E3A 2006 PC Epreuve A

partie I.

1) (a) L'application T_n est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui vérifie $T_n \circ T_n = T_n$, c'est donc bien un projecteur.

(b) L'image de T_n est $\mathbb{R}_n[X]$ car chaque polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est égal à son image par T_n .

(c) $P \in \text{Ker}(T_n) \Leftrightarrow P = \sum_{k>n} p_k X^k \Leftrightarrow P(x) = x^{n+1}Q(x)$ avec Q polynôme. On en déduit que $P(x) = o(x^n)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Réciproquement, si $P(x) = o(x^n)$ on ne peut pas avoir $p_k \neq 0$ avec $k \leq n$ donc $T_n(P) = 0$.

2) (a) Le degré de $(X + X^2)^k$ est égal à $2k$; par suite, si le degré de P est égal à n , celui de $\varphi(P)$ est égal à $2n$.

(b) Si P n'est pas nul, il a un degré $n \geq 0$ d'où $\varphi(P)$ a pour degré $2n$ et donc n'est pas nul : φ est injectif. φ n'est pas surjectif car les polynômes de degré impair n'ont pas d'antécédent par φ .

3) (a) $\varphi_4(X^j) = T_4((X + X^2)^j)$. En tronquant au degré 4 on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_4(1) = 1 \\ \varphi_4(X) = X + X^2 \\ \varphi_4(X^2) = X^2 + 2X^3 + X^4 \\ \varphi_4(X^3) = X^3 + 3X^4 \\ \varphi_4(X^4) = X^4 \end{cases} \quad \text{On a donc : } M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\varphi_n(X^j) = T_n((X + X^2)^j) = T_n(X^j(1 + X)^j) = T_n\left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} X^{j+k}\right)$. En posant $i = j + k$ on obtient $\varphi_n(X^j) = T_n\left(\sum_{i=j}^{2j} \binom{j}{i-j} X^i\right) = \sum_{i=j}^{\min(2j,n)} \binom{j}{i-j} X^i$. La matrice M_n est bien triangulaire inférieure avec $m_{i,j} = \binom{j}{i-j}$ pour $0 \leq j \leq i \leq n$ (le coefficient binomial est nul pour $i - j > j$).

4) (a) $M_4 \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 - 2y_2 + 2y_1 \\ x_4 = y_4 - 3y_3 + 5y_2 - 5y_1 \end{cases} \quad \text{d'où : } M_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) M_n est inversible car elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. L'endomorphisme φ_n est donc bijectif.

(c) La résolution du système $M_n \times X_n = Y_n$ comme au I.4.a montre que chaque x_i s'exprime en fonction des y_j avec $j \leq i$. La matrice M_n^{-1} est donc triangulaire inférieure.

5) (a) Pour $0 \leq i \leq n$ on a $T_n((X + X^2)^i) = T_n(\varphi(X^i)) = \varphi_n(X^i)$. $\mathcal{B}'$ est donc la base image de la base canonique $\mathcal{B}$ par l'automorphisme φ_n . Par suite, Q_n est la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Pour $0 \leq j \leq n$ on a donc $X^j = \sum_{i=0}^n q_{i,j} T_n((X + X^2)^i)$ qui donne bien $x^j = \sum_{i=0}^n q_{i,j} (x + x^2)^i + o(x^n)$

quand x tend vers 0 puisque T_n tronque au degré n .

(c) On reporte I.5.b dans $X^j = (X + X^2)X^{j-1} - X^{j+1}$:

$$\sum_{i=0}^n q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^n q_{i,j-1}(x+x^2)^{i+1} + o(x^n) - \sum_{i=0}^n q_{i,j+1}(x+x^2)^i + o(x^n)$$

d'où en changeant i en $i-1$ dans le second $\sum$ et en utilisant $q_{0,j} = 0$ pour $j \geq 1$:

$\sum_{i=1}^n (q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1})(x+x^2)^i = o(x^n)$. On en déduit pour tout i que $r_i = q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1}$ est nul (sinon le premier membre serait équivalent à $r_m x^m$ pour un $m \leq n$ et ne serait pas égal à $o(x^n)$).

(d) La diagonale de Q_5 est constituée de 1, sa première colonne de 0 excepté le premier coefficient. On calcule successivement à l'aide de l'égalité donnant $q_{i,j}$: $q_{2,1} = -1$, $q_{3,2} = -2, \dots$ jusqu'à $q_{5,4} = -4$, puis $q_{3,1} = 2$, $q_{4,2} = 5$ et $q_{5,3} = 9$, puis $q_{4,1} = -5$, $q_{5,2} = -14$, et enfin $q_{5,1} = 14$.

(e) La formule proposée donne $q_{i,i} = 1$, $q_{i,i-1} = -(i-1)$, $q_{i,i-2} = (i-2)(i+1)/2$, $q_{i,i-3} = (i-3)(i+2)(i+1)/6$ et $q_{5,1} = \binom{8}{4}/5 = 14$. On retrouve bien les coefficients calculés au I.5.d.

partie II.

1) (a) Puisque $x+x^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0 on peut écrire $f(x+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x+x^2) + o((x+x^2)^n) = P(x+x^2) + o(x^n)$ car $x+x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. D'où en tronquant au degré n : $f(x+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(P(x+x^2)) + o(x^n)$.

(b) Pour $P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$, les coordonnées de $T_n(P(X+X^2)) = \varphi_n(P)$ s'obtiennent par le produit matriciel $M_n \times \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$. Donc : $f(x+x^2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_{i,j} p_j x^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{j}{i-j} p_j \right) x^i + o(x^n)$.

2) (a) $g(x) = f(x+x^2)$ avec $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$. Le produit $M_4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donne $g(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$.

(b) Un calcul direct donne : $g(x) = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o((x+x^2)^4) = 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$.

3) (a) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n (x+x^2)^n$ converge si $|x+x^2| < R$ et diverge si $|x+x^2| > R$. L'étude de la fonction $x \mapsto x+x^2$ qui a un minimum égal à $-1/4$ montre qu'il faut distinguer 2 cas :

- Si $R > 1/4$, l'équation $|x+x^2| = R$ a deux solutions : $a = \frac{-1 - \sqrt{1+4R}}{2}$ et $b = \frac{-1 + \sqrt{1+4R}}{2}$. La série $(\sum \lambda_n (x+x^2)^n)$ converge alors pour $x \in]a, b[$ et diverge pour $x < a$ ou pour $x > b$; le plus grand ensemble ouvert Ω est donc $]a, b[$.

- Si $R < 1/4$, l'équation $|x+x^2| = R$ a quatre solutions : $a, b, c = \frac{-1 - \sqrt{1-4R}}{2}$ et $d = \frac{-1 + \sqrt{1-4R}}{2}$

vérifiant $a < c < d < 0 < b$. La série $(\sum \lambda_n (x+x^2)^n)$ converge pour $x \in]a, c[\cup]d, b[$ et diverge pour $x < a$ ou $x > b$ ou $x \in]c, d[$; le plus grand ensemble ouvert Ω est donc $]a, c[\cup]d, b[$.

(b) $g_N(x) = \sum_{n=0}^N \lambda_n x^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j$ d'où en posant $k = n + j$: $g_N(x) = \sum_{n=0}^N \lambda_n \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} x^k$. On permute ensuite les deux $\sum$ en tenant compte des conditions sur n et k : $0 \leq n \leq N$ et $n \leq k \leq 2n$ qui donnent $0 \leq k \leq 2N$ et $k/2 \leq n \leq \min(N, k)$. On obtient : $g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^{\min(k, N)} \lambda_n \binom{n}{k-n}$.

(c) $g_N(x) = \sum_{k=0}^N x^k \sum_{n=k/2}^k \lambda_n \binom{n}{k-n} + \sum_{k=N+1}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^N \lambda_n \binom{n}{k-n}$ d'où

$$|g_N(x) - h_N(x)| = \left| \sum_{k=N+1}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^N \lambda_n \binom{n}{k-n} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{2N} |x|^k \sum_{n=k/2}^N |\lambda_n| \binom{n}{k-n} \leq \sum_{n=N/2}^N |\lambda_n| \sum_{k=n}^{2n} |x|^k \binom{n}{k-n}$$

en permutant les $\sum$ car les conditions $N < k \leq 2N$ et $k/2 \leq n \leq N$ entraînent $N/2 < n \leq N$ et $N < k \leq 2n$ que l'on peut majorer par $N/2 \leq n \leq N$ et $n \leq k \leq 2n$ puisque cela revient à ajouter des termes positifs dans le second membre. On obtient alors en posant $k = n + j$: $|h_N(x) - g_N(x)| \leq \sum_{n=N/2}^N |\lambda_n| |x|^n \sum_{j=0}^n |x|^j \binom{n}{j}$ soit $|h_N(x) - g_N(x)| \leq \sum_{n=N/2}^N |\lambda_n| |x|^n (1 + |x|)^n = \sum_{n=N/2}^N |\lambda_n| (x^2 + |x|)^n$.

(d) $f(x+x^2) = \lim_{N \rightarrow +\infty} g_N(x)$. Si $x^2 + |x| < R$ c'est à dire pour $|x| < b = \frac{-1 + \sqrt{1+4R}}{2}$ la série $\sum (|\lambda_n| (x^2 + |x|)^n)$ converge, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} |h_N(x) - g_N(x)| = 0$ et par suite $f(x+x^2) = \lim_{N \rightarrow +\infty} h_N(x)$. On retrouve bien le développement limité obtenu au II.1.b en changeant i en k et p_j en λ_j :

$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \binom{j}{k-j} \lambda_j \right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \mu_k x^k + o(x^n)$ car $\mu_k = \sum_{j=0}^k \binom{j}{k-j} \lambda_j$ puisque $\binom{j}{k-j} = 0$ pour $k-j > j \Leftrightarrow j < k/2$.

4) (a) $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{3n} - x^{3n+1})$. Le rayon de convergence est égal à 1 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \Leftrightarrow |x| < 1$.

(b) Pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on a $\lambda_n = (-1)^n$ donc $\mu_k = S_k$. On obtient donc en comparant avec le développement en série obtenu au II.4.a : $S_{3n} = 1$, $S_{3n+1} = -1$ et $S_{3n+2} = 0$.

partie III.

1) (a) La fonction a est continue et strictement croissante sur $I =]-1/2; +\infty[$; elle définit une bijection de I sur $J =]-1/4; +\infty[$. I est le plus grand possible car a atteint son minimum en $x = -1/2$. Pour $u \in J$ on a $a^{-1}(u) = \frac{-1 + \sqrt{1+4u}}{2}$.

(b) Le cours donne $(1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ avec un rayon de convergence égal à 1. On en déduit

$a^{-1}(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(4u)^n}{2}$ avec un rayon de convergence égal à $1/4$.

(c) En exprimant le développement limité à l'ordre n de $a^{-1}(u)$ on obtient $x = \sum_{k=0}^n b_k(x+x^2)^k + o(x^n)$

d'où en tronquant au degré n : $X = \sum_{k=0}^n b_k T_n((X+X^2)^k)$ qui montre bien que les coefficients b_k sont ceux de la deuxième colonne de Q_n qui exprime X en fonction des $T_n((X+X^2)^k)$.

(d) Pour $k \geq 1$,

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(1/2)(-1/2)\dots(1/2-k+1)}{k!} = (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k k! 2^{k-1} (k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1}}{2^{2k-1} k}.$$

On en déduit $b_k = \frac{(-1)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1} 4^k}{2^{2k-1} 2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{2k-2}{k-1}$. C'est bien le résultat admis au I.5.e en posant $i = k$ et $j = 1$: $q_{k,1} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1}$.

2) (a) L'équation $z^2 + z - w = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$ vérifiant $z_1 + z_2 = -1$; elles sont donc symétriques par rapport au point $-1/2$. L'application $\alpha : z \mapsto z + z^2$ soit encore $(x, y) \mapsto (x + x^2 - y^2, y + 2xy)$ est de classe C^1 sur Π .

Pour $x \neq -1/2$, $\alpha(x, y) = (x + x^2 - y^2, y(1 + 2x))$ n'est pas sur la demi-droite $D =]-\infty; -1/4]$ car soit $y \neq 0$, soit $y = 0$ et $x + x^2 > -1/4$; par suite $\alpha(\Pi)$ est inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite D . Réciproquement, si $w \in \mathbb{R}^2 - D$, le discriminant $\Delta = 1 + 4w$ n'est pas un réel négatif et donc les solutions de $z + z^2 = w$, $z = (-1 \pm \delta)/2$, avec $\delta \notin i\mathbb{R}$, ne sont pas sur la droite d'équation $x = -1/2$; par la symétrie par rapport au point $-1/2$, il y en a donc une seule dans Π et ainsi α est une bijection de Π sur $\mathbb{R}^2 - D$. Enfin, le jacobien de α est égal à $\begin{vmatrix} 1+2x & -2y \\ 2y & 1+2x \end{vmatrix} = (1+2x)^2 + 4y^2 \neq 0$ car $x \neq -1/2$. α est donc bien un C^1 -difféomorphisme de Π sur $\mathbb{R}^2 - D$.

(b) Soit $k > -1/2$. La droite D_k a pour image par α l'ensemble des (u, v) avec $u = k + k^2 - y^2$ et $v = (1 + 2k)y$ ($y \in \mathbb{R}$) qui a pour équation $v^2 = (1 + 2k)^2(k + k^2 - u)$. Il s'agit d'une parabole d'axe Ou , de sommet $(k + k^2; 0)$, de paramètre $(1 + 2k)^2/2$. Le foyer est donc le point de l'axe Ou d'abscisse $k + k^2 - (1 + 2k)^2/4 = -1/4$. Il est bien le même pour toutes les paraboles.

3) D'après III.1.b le rayon de convergence de $(\sum b_k w^k)$ est égal à $1/4$. $\beta(w)$ est donc défini pour $|w| < 1/4$. Sur ce disque, $\gamma(w) = \beta(w)^2 + \beta(w) - w$ possède un développement en série entière $(\sum \gamma_k w^k)$. Pour $w = u \in \mathbb{R}$ et $|u| < 1/4$ on a $\beta(u)^2 + \beta(u) = u$ puisque $\beta(u) = a^{-1}(u)$ et donc $\gamma(u) = 0$. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on déduit que les γ_k sont tous nuls d'où $\gamma(w) = 0$ pour $|w| < 1/4$, soit $\alpha(\beta(w)) = w$. Il reste à montrer que $\beta(w) \in \Pi$. $w = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho < 1/4$.

$\beta(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k w^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \rho^k e^{ki\theta}$ et a pour partie réelle $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \rho^k \cos(k\theta) \geq -\sum_{k=0}^{+\infty} |\beta_k| \rho^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k (-\rho)^k = a^{-1}(-\rho) > -1/2$ d'après III.1.a puisque $-\rho > -1/4$. On a donc bien montré que $\beta(w) \in \Pi$ et donc $\beta(w) = \alpha^{-1}(w)$.