

Maths D 2015

Abauzit Gabriel

Notations :

- Le symbole $:=$ est utilisé pour affecter une valeur à une nouvelle variable.
- Nous utiliserons la notation de Vinogradov : les symboles \ll et \gg ont la même signification que \mathcal{O} . Par exemple $f \ll g$ (respectivement $f \gg g$) signifie $f = \mathcal{O}(g)$ (respectivement $g = \mathcal{O}(f)$).

I

1. (a) L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}(X) & \longrightarrow \{0, 1\}^X \\ Y & \longmapsto \mathbb{1}_Y \end{cases}$$

est une bijection de bijection réciproque

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} \{0, 1\}^X & \longrightarrow \mathbb{P}(X) \\ f & \longmapsto f^{-1}(\{1\}) \end{cases}$$

donc $|\mathbb{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^d$.

(b) Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} x^k = (1+x)^d$, alors φ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^d k \binom{d}{k} x^{k-1} = d(1+x)^{d-1} \text{ et } \varphi''(x) = \sum_{k=0}^d k(k-1) \binom{d}{k} x^{k-2} = d(d-1)(1+x)^{d-2}$$

En évaluant en $x = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^d k \binom{d}{k} = d2^{d-1} \text{ et } \sum_{k=0}^d k(k-1) \binom{d}{k} = d(d-1)2^{d-2}$$

(c) On partitionne selon les valeurs de $|Y|$:

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} |Y| = \frac{1}{2^d} \sum_{k=0}^d \sum_{\substack{Y \in \mathbb{P}(X) \\ |Y|=k}} k = \frac{1}{2^d} \sum_{k=0}^d k \binom{d}{k} = \frac{d}{2}$$

et de même

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} |Y|^2 = \frac{1}{2^d} \sum_{k=0}^d k^2 \binom{d}{k} = \frac{d}{2} + \frac{d(d-1)}{4} = \frac{d(d+1)}{4}$$

(d) Si $Y \in \mathbb{P}(X)$ alors $\Delta(X, Y) = |2|Y| - |X||$ donc d'après la question précédente :

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} \Delta(X, Y)^2 = \frac{4}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} |Y|^2 - \frac{4d}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} |Y| + \frac{d^2}{|\mathbb{P}(X)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(X)} 1 = d$$

2. (a) L'application $n \mapsto \frac{n-a}{q}$ est une bijection de $S_{q,a}(N)$ dans $\llbracket 0, \frac{N-a}{q} \rrbracket$ donc

$$|S_{q,a}(N)| = 1 + \left\lfloor \frac{N-a}{q} \right\rfloor \leq 1 + \frac{N-a}{q} < 1 + \frac{N}{q}$$

(b) L'application $(Y_1, Y_2) \mapsto Y_1 \cup Y_2$ est une bijection de $\mathbb{P}(S_{q,a}(N)) \times \mathbb{P}(\llbracket 1, N \rrbracket \setminus S_{q,a}(N))$ dans $\mathbb{P}(N)$ donc

$$\sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 = \sum_{\substack{Y_1 \subset S_{q,a}(N) \\ Y_2 \subset \llbracket 1, N \rrbracket \setminus S_{q,a}(N)}} \Delta(S_{q,a}(N), Y_1 \cup Y_2)^2$$

Or, avec les mêmes notations, $\Delta(S_{q,a}(N), Y_1 \cup Y_2) = |2|Y_1| - |S_{q,a}(N)|| = \Delta(S_{a,q}(N), Y_1)$ donc

$$\sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 = |\mathbb{P}(\llbracket 1, N \rrbracket \setminus S_{q,a}(N))| \sum_{Y_1 \in \mathbb{P}(S_{q,a}(N))} \Delta(S_{q,a}(N), Y_1)^2$$

Puis d'après la question précédente

$$\sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 = |\mathbb{P}(\llbracket 1, N \rrbracket \setminus S_{q,a}(N))| \cdot |S_{q,a}(N)| \cdot |\mathbb{P}(S_{q,a}(N))| = |S_{q,a}(N)| \cdot |\mathbb{P}(N)|$$

Finalement

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 = \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q |S_{q,a}(N)| \leq \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \left(1 + \frac{N}{q}\right) = \frac{t(t+1)}{2} + Nt \leq 2Nt$$

3. Il existe $Y \in \mathbb{P}(N)$ tel que

$$\sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 \leq 2Nt$$

car sinon on aurait

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} \sum_{q=1}^t \sum_{a=1}^q \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 > \frac{1}{|\mathbb{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathbb{P}(N)} 2Nt = 2Nt$$

ce qui contredit le résultat de la question précédente. Pour un tel Y , on a d'après le même argument que précédemment $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leq \sqrt{2Nt}$ pour tout $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, tout $q \in \llbracket 1, t \rrbracket$ et tout $a \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Soit $t := \lfloor N^{1/3} \rfloor$, alors $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leq \sqrt{2N^{2/3}}$ pour tout $q \in \llbracket 1, t \rrbracket$ et tout $a \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Si maintenant $q \geq t+1$ et $a \in \llbracket 1, q \rrbracket$, alors $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leq |S_{q,a}(N)| \leq 1 + \frac{N}{q} \leq 1 + \frac{N}{t+1} \leq 1 + N^{2/3} \leq 2N^{2/3}$ donc $C = \max(\sqrt{2}, 2) = 2$ convient dans tous les cas.

II

1. (a) S'agissant de sommes finies, on peut permuter les symboles somme/intégrale :

$$\int_0^1 \widehat{c}(x) e^{-2i\pi n x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) \underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi(m-n)x} dx}_{=\delta_{n,m}} = c(n)$$

$$\int_0^1 |\widehat{c}(x)|^2 dx = \int_0^1 \widehat{c}(x) \overline{\widehat{c}(x)} dx = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} c(n) \overline{c(m)} \underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi(n-m)x} dx}_{=\delta_{n,m}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) \overline{c(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|^2$$

(b) Si $c(n) = 0$ pour tout $|n| \geq M_c$ et $d(n) = 0$ pour tout $|n| \geq M_d$ alors la somme définissant $(c * d)(n)$ est indexée sur un ensemble inclus dans

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p + q = n\} \cap [-(M_c - 1), M_c - 1] \times [-(M_d - 1), M_d - 1]$$

qui est fini donc la somme est finie et $c * d$ est bien définie. De plus $c(p)d(q) = 0$ pour tout $p + q = n$ dès lors que $|n| \geq M_c + M_d$ puisqu'alors $|p| \geq M_c$ ou $|q| \geq M_d$ donc $(c * d)(n) = 0$ pour tout $|n| \geq M_c + M_d$ et ainsi $c * d \in \mathcal{E}$.

(c) On partitionne la double-somme (ce qui est possible car cette dernière est finie) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{c}(x) \widehat{d}(x) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} c(p) d(q) e^{2i\pi(p+q)x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p+q=n} c(p) d(q) \right) e^{2i\pi n x} = \widehat{(c * d)}(x)$$

2.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) = \sum_{n \in Y} (1 - \eta) + \sum_{n \in [1, N] \setminus Y} (-\eta) + \sum_{n \notin [1, N]} 0 = r(1 - \eta) - (N - r)\eta = 0$$

3.

$$(\chi * c_{-E})(0) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \chi(p) c_{-E}(-p) = \sum_{p \in E} \chi(p) = \sum_{p \in E \cap Y} (1 - \eta) + \sum_{p \in ([1, N] \cap E) \setminus Y} (-\eta) = V(E)$$

4. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x . S'il existe $i \neq j$ tel que $\{\alpha_i\} = \{\alpha_j\}$, alors en posant $h := \lfloor \alpha_i \rfloor - \lfloor \alpha_j \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $|\alpha_i - \alpha_j - h| = 0 \leq \frac{1}{n}$. On suppose dorénavant les $\{\alpha_i\}$ deux à deux distincts. Si $\max\{\alpha_k\} - \min\{\alpha_k\} \geq \frac{n-1}{n}$, alors en posant i tel que $\{\alpha_i\} := \max\{\alpha_k\}$, j tel que $\{\alpha_j\} := \min\{\alpha_k\}$ et $h := \lfloor \alpha_i \rfloor - \lfloor \alpha_j \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$, on a $|\alpha_i - \alpha_j - h| \leq \frac{1}{n}$. Dans le cas contraire, les $\{\alpha_i\}$ sont à valeurs dans un intervalle $[a, b[\subset [0, 1[$ de longueur $b - a \leq \frac{n-1}{n}$ (on peut prendre par exemple $a := \min\{\alpha_k\}$ et $b := \frac{1}{2} \max\{\alpha_k\} + \frac{1}{2} \min\{\alpha_k\} + \frac{n-1}{2n}$). On a alors

$$[a, b[= \bigcup_{k=0}^{n-2} \left[a + k \frac{b-a}{n-1}, a + (k+1) \frac{b-a}{n-1} \right[$$

Il y a $n-1$ tels intervalles et n réels distincts, il existe donc $i \neq j$ tels que $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha_j\}$ soient dans le même intervalle parmi ceux-dessus. On a donc $|\{\alpha_i\} - \{\alpha_j\}| \leq \frac{b-a}{n-1} \leq \frac{1}{n}$, il suffit alors de poser $h := \lfloor \alpha_i \rfloor - \lfloor \alpha_j \rfloor \in \mathbb{Z}$.

(b) D'après la question précédente appliquée à $\alpha_i := i\alpha$, il existe $i \neq j$ et $h \in \mathbb{Z}$ tels que $|(i-j)\alpha - h| \leq \frac{1}{Q}$. On peut sans pertes de généralité supposer $i > j$, auquel cas $q := i - j \in [1, Q]$ convient.

(c) D'après la question précédente il existe $q \in [1, 8s]$ et $h \in \mathbb{Z}$ tels que $|q\alpha - h| \leq \frac{1}{8s}$. On a alors

$$\begin{aligned} \widehat{c}_q(\alpha) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_q(n) e^{2i\pi n\alpha} \\ &= \sum_{n \in E_q} e^{2i\pi n\alpha} \\ &= \sum_{k=-s}^s e^{2i\pi kq\alpha} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^s \cos(2\pi kq\alpha) \\ &= 2s + 1 - 2 \sum_{k=1}^s (1 - \cos(2\pi kq\alpha)) \end{aligned}$$

Or \cos est 1-lipschitzienne donc $|1 - \cos(2\pi kq\alpha)| = |\cos(2\pi kh) - \cos(2\pi kq\alpha)| \leq 2\pi k|h - q\alpha| \leq \frac{\pi k}{4s}$ d'où

$$|\widehat{c}_q(\alpha)| \geq 2s + 1 - \frac{\pi}{2s} \sum_{k=1}^s k = 2s + 1 - \frac{\pi}{4}(s+1) = \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)s + 1 - \frac{\pi}{4} \geq \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)s$$

La constante $K := 2 - \frac{\pi}{4}$ convient.

5. (a) On note q_0 l'entier définie par la question précédente. On peut adapter le raisonnement de la question II.3.

pour montrer que $V(E_{q,p}) = (\chi * c_q)(p)$. Ainsi d'après les questions II.1. et II.2. on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 &= \sum_{q=1}^{8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\chi * c_q)(p)^2 \\
&= \sum_{q=1}^{8s} \int_0^1 |(\widehat{\chi * c_q})(x)|^2 dx \\
&= \int_0^1 |\widehat{\chi}(x)|^2 \sum_{q=1}^{8s} |\widehat{c_q}(x)|^2 dx \\
&\geq \int_0^1 |\widehat{\chi}(x)|^2 |\widehat{c_{q_0}}(x)|^2 dx \\
&\geq K^2 s^2 \int_0^1 |\widehat{\chi}(x)|^2 dx \\
&= K^2 s^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\chi(n)|^2 \\
&= K^2 s^2 \left(\sum_{n \in [1, N] \cap Y} (1 - \eta)^2 + \sum_{n \in [1, N] \setminus Y} (-\eta)^2 \right) \\
&= K^2 s^2 (r(1 - \eta)^2 + (N - r)\eta^2) \\
&= K^2 s^2 \eta(1 - \eta)N
\end{aligned}$$

(b) On note n_0 le nombre de termes non nuls dans la double-somme précédente. $\chi(p) = 0$ dès lors que $|p| \geq N + 1$ et $c_q(p) = 0$ dès lors que $|p| \geq sq + 1$ donc $V(E_{q,p}) = 0$ dès que $|p| \geq N + sq + 2$. Il y a donc au plus $\sum_{q=1}^{8s} (2N + 2sq + 3) = 8s(2N + s(8s + 1) + 3)$ termes non nuls dans la double somme. Ainsi il existe $q \in \llbracket 1, 8s \rrbracket$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $V(E_{q,p})^2 \geq \frac{K^2 \eta(1 - \eta)Ns^2}{8s(2N + s(8s + 1) + 3)}$ puisque sinon on aurait

$$\sum_{q=1}^{8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 < \frac{n_0}{8s(2N + s + (8s + 1) + 3)} K^2 \eta(1 - \eta)Ns^2 \leq K^2 \eta(1 - \eta)Ns^2$$

ce qui contredit l'inégalité de la question précédente. On pose $s := \lfloor \sqrt{2N + 3} \rfloor + 1$ de sorte que $8s(2N + s(8s + 1) + 3) \leq 8s(9s^2 + s) \leq 80s^2$. On a alors

$$V(E_{q,p})^2 \geq \frac{K^2 \eta(1 - \eta)N}{80s} \geq \frac{K^2 \eta(1 - \eta)N}{80(\sqrt{2N + 3} + 2)} \geq \frac{K^2 \eta(1 - \eta)\sqrt{N}}{80(2 + \sqrt{5})}$$

Ainsi en posant $K' := \frac{K}{\sqrt{80(2 + \sqrt{5})}}$ qui est indépendant de N et de Y puisque K est une constante absolue, et $Z := E_{q,p} \cap \llbracket 1, N \rrbracket$, alors Z est un sous-ensemble de $\llbracket 1, N \rrbracket$ en progression arithmétique de raison q et tel que

$$\left| |Y \cap Z| - \eta|Z| \right| \geq K' \sqrt{\eta(1 - \eta)} N^{1/4}$$

III

1. (a) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{H}_n) la proposition

$$(\mathcal{H}_n) : \omega \text{ est continue en tout point de l'intervalle } [n, n + 1[.$$

• ω est continue sur $[1, 2]$ et sur $[2, 3]$ car pour tout $u \in [2, 3], [1, u - 1] \subset [1, 2]$ donc $u \mapsto \int_1^{u-1} \omega(t) dt$ est continue sur $[2, 3]$. De plus, $\lim_{u \rightarrow 2^-} \omega(u) = \omega(2)$ par continuité de $u \mapsto \frac{1}{u}$ et

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \int_1^{u-1} \omega(t) dt = 0$$

car ω est continue par morceaux sur $[1, 3]$ donc $\lim_{u \rightarrow 2^+} \omega(u) = \frac{1}{2} = \omega(2)$, et (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2) sont vraies.

• Soit $n \geq 2$ tel que $(\mathcal{H}_1), \dots, (\mathcal{H}_n)$ sont vraies, alors par hypothèse de récurrence ω est continue sur $[1, n+1]$. Ainsi $u \mapsto \int_1^{u-1} \omega(t) dt$ est continue sur $[2, n+2]$ et donc ω est continue sur $[2, n+2]$, donc sur $[1, n+2]$ par hypothèse de récurrence et (\mathcal{H}_{n+1}) est vraie.

Il en résulte que $u \mapsto \int_1^{u-1} \omega(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]2, +\infty[$ puisque pour $u > 2$, $[1, u-1] \subset [1, +\infty[$ et que ω est continue sur $[1, +\infty[$. Il en va donc de même pour ω .

(b) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{H}_n) la proposition

$$(\mathcal{H}_n) : \forall u \in [1, n], \frac{1}{u} \leq \omega(u) \leq 1$$

• (\mathcal{H}_1) est immédiate.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (\mathcal{H}_n) est vraie, alors

$$\forall u \in [1, n+1], \omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_1^{u-1} \omega(t) dt \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_1^{u-1} 1 dt = 1$$

car $[1, u-1] \subset [1, n]$ et de même

$$\forall u \in [1, n+1], \omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_1^{u-1} \underbrace{\omega(t)}_{\geq \frac{1}{t} \geq 0} dt \geq \frac{1}{u}$$

(c) $\forall u > 3$, $u\omega(u) = 1 + \int_1^{u-1} \omega(t) dt$ donc en dérivant cette relation on a $u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u) = -\int_{u-1}^u \omega'(t) dt$.

(d) On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{H}_k) la proposition

$$(\mathcal{H}_k) : \lim_{u \rightarrow +\infty} u^k \omega'(u) = 0$$

• D'après la question précédente

$$\begin{aligned} u\omega'(u) &= \omega(u-1) - \omega(u) \\ &= \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-1} \int_1^{u-2} \omega(t) dt - \frac{1}{u} - \frac{1}{u} \int_1^{u-1} \omega(t) dt \\ &= -\frac{1}{u(u-1)} - \frac{1}{u(u-1)} \int_1^{u-2} \omega(t) dt - \frac{1}{u} \int_{u-1}^u \omega(t) dt \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente

$$\left| \frac{1}{u(u-1)} \int_1^{u-2} \omega(t) dt \right| \leq \frac{u-2}{u(u-1)} \ll \frac{1}{u} \text{ et } \left| \frac{1}{u} \int_{u-1}^u \omega(t) dt \right| \leq \frac{1}{u}$$

donc $u\omega'(u) \ll \frac{1}{u}$. Finalement $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\omega'(u) = 0$ et (\mathcal{H}_1) est vraie.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que (\mathcal{H}_k) est vraie et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $A > 0$ tel que $|u^k \omega'(u)| < \varepsilon$ pour tout $u > A$. Soit $u > A+1$, alors d'après la question précédente

$$|u^{k+1} \omega'(u)| = u^k \left| \int_{u-1}^u \omega'(t) dt \right| \leq \varepsilon u^k \int_{u-1}^u \frac{dt}{t^k}$$

Si $k=1$, alors $|u^{k+1} \omega'(u)| \leq \varepsilon u \ln \left(1 + \frac{1}{u-1} \right) \leq \frac{\varepsilon u}{u-1} \leq 2\varepsilon$. Si $k \geq 2$, alors

$$|u^{k+1} \omega'(u)| \leq \varepsilon \frac{u^k}{k-1} \left(\frac{1}{(u-1)^{k-1}} - \frac{1}{u^{k-1}} \right) = \varepsilon \frac{u}{(k-1)} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{u})^{k-1}} - 1 \right)$$

Or $\frac{1}{(1-\frac{1}{u})^{k-1}} - 1 \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{u}$ donc il existe $B > 0$ tel que $\frac{1}{(1-\frac{1}{u})^{k-1}} - 1 \leq \frac{2(k-1)}{u}$ pour tout $u > B$. Ainsi pour tout $u > \max(A+1, B)$,

$$|u^{k+1} \omega'(u)| < 2\varepsilon$$

Dans tous les cas $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{k+1} \omega'(u) = 0$ donc (\mathcal{H}_{k+1}) est vraie.

(e) D'après la question précédente $\omega'(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \omega'(u) du$ converge et donc ω admet une limite finie en $+\infty$.

(f) D'après la question III.1.(c)

$$u\tilde{\omega}'(u) + \tilde{\omega}(u) = u\omega'(u) + \tilde{\omega}(u) = \omega(u-1) - \omega(u) + \tilde{\omega}(u) = \tilde{\omega}(u-1)$$

En intégrant cette égalité, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u > 3, u\tilde{\omega}(u) = C + \int_1^{u-1} \tilde{\omega}(t) dt$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ on a $C = -\int_1^{+\infty} \tilde{\omega}(t) dt$ car $\tilde{\omega}(u) = -\int_u^{+\infty} \omega'(t) dt = o\left(\frac{1}{u}\right)$ puisque $\omega'(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ d'après la question III.1.(d) et cette dernière intégrale est convergente. On a finalement

$$\forall u > 3, u\tilde{\omega}(u) = \int_1^{u-1} \tilde{\omega}(t) dt - \int_1^{+\infty} \tilde{\omega}(t) dt = -\int_{u-1}^{+\infty} \tilde{\omega}(t) dt$$

(g) Supposons par l'absurde qu'il existe $C \geq 1$ tel que $\tilde{\omega}$ est de signe constant sur $[C, +\infty[$, disons positif. Alors $(C+1)\tilde{\omega}(C+1) = -\int_C^{+\infty} \underbrace{\tilde{\omega}(t)}_{\geq 0} dt < 0$ car $\tilde{\omega}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[C, +\infty[$, ce qui n'est pas.

2. $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale $\sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{\ln n} = \int_a^b \frac{dt}{\ln t} + \mathcal{O}(1) = \int_a^b \frac{dt}{\ln t} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{(\ln b)^2}\right)$. Soit Li la fonction logarithme intégral définie par

$$\forall x > 1, \text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Alors par intégration par parties, on a

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

De plus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(\ln t)^2} \right) = \frac{1}{(\ln t)^2} - \frac{2}{(\ln t)^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\ln t)^2}$$

Comme l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^2}$ diverge, on peut intégrer l'équivalent :

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Ainsi $\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right)$. On a alors d'une part

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} = \text{Li}(b) - \text{Li}(a) = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{(\ln b)^2}\right)$$

et d'autre part d'après le théorème des nombres premiers

$$\pi(b) - \pi(a) = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{(\ln b)^2}\right)$$

donc

$$\pi(b) - \pi(a) = \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{(\ln b)^2}\right)$$

3. (a) Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ si n est premier et 0 sinon. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) &= \sum_{a \leq n \leq b} f(n)[\pi(n) - \pi(n-1)] \\ &= \sum_{a \leq n \leq b} f(n)\pi(n) - \sum_{a-1 \leq n \leq b-1} f(n+1)\pi(n) \\ &= \sum_{a \leq n \leq b} \pi(n)[f(n) - f(n+1)] - \pi(a^-)f(1+a^-) + \pi(b^0)f(1+b^0) \end{aligned}$$

(b) On a de même

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} &= \sum_{a \leq n \leq b} f(n)[\psi(n) - \psi(n-1)] \\ &= \sum_{a \leq n \leq b} f(n)\psi(n) - \sum_{a-1 \leq n \leq b-1} f(n+1)\psi(n) \\ &= \sum_{a \leq n \leq b} \psi(n)[f(n) - f(n+1)] - \psi(a^-)f(1+a^-) + \psi(b^0)f(1+b^0) \end{aligned}$$

On a le résultat en remarquant que $\psi(a^-) = \pi(a^-)$.

(c) En combinant les deux question précédentes on a

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} f(p) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} \right| \leq |\pi(b^0) - \psi(b^0)| \cdot |f(1+b^0)| + \sum_{a \leq n \leq b} |\pi(n) - \psi(n)| \cdot |f(n) - f(n+1)|$$

Or

$$|\pi(n) - \psi(n)| = \left| \pi(n) - \pi(a^-) - \sum_{a \leq k \leq n} \frac{1}{\ln k} \right| = \left| \pi(n) - \pi(a) - \sum_{a \leq k \leq n} \frac{1}{\ln k} \right| \leq K \frac{n}{(\ln n)^2}$$

d'après III.2. et de même $|\pi(b^0) - \psi(b^0)| = |\pi(b) - \psi(b)| \leq K \frac{b}{(\ln b)^2}$ donc

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}} f(p) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{f(n)}{\ln n} \right| \leq K \frac{bf(1+b^0)}{(\ln b)^2} + K \sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{(\ln n)^2} |f(n+1) - f(n)|$$

(d) La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^k}$ est une série à termes positifs. Par comparaison série-intégrale ($x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^k}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$) on a dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$$\sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^k} \leq \sum_{n \geq a+1} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^k} + \frac{1}{a(\ln a)^k} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} + \frac{1}{a(\ln a)^k} = \frac{1}{(k-1)(\ln a)^{k-1}} + \frac{1}{a(\ln a)^k}$$

En particulier la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^k}$ converge.

(e) On applique le résultat la question III.3.(c) à $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ qui est à valeurs dans \mathbb{R}^+ :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{n(\ln n)^3} + K \frac{b}{(\ln b)^2(1+b^0)(\ln(1+b^0))^2} + K \sum_{a \leq n \leq b} \frac{n}{(\ln n)^2} \left| \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} - \frac{1}{n(\ln n)^2} \right|$$

En faisant tendre b vers $+\infty$, on a

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \geq a} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^3} + K \sum_{n \geq a} \frac{n}{(\ln n)^2} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{(n+1)\ln((n+1))^2} \right)$$

Notons que la série $\sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^2} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{(n+1)\ln((n+1))^2} \right)$ converge puisque

$$\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{(n+1)\ln((n+1))^2} = \frac{(n+1)(\ln(n+1))^2 - n(\ln n)^2}{n(n+1)(\ln n)^2(\ln(n+1))^2} = \frac{(n+1)(\ln n + o(1))^2 - n(\ln n)^2}{n(n+1)(\ln n)^2(\ln(n+1))^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{(n+1)\ln((n+1))^2} \ll \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$$

d'où

$$\sum_{n \geq a} \frac{n}{(\ln n)^2} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2} - \frac{1}{(n+1)\ln((n+1))^2} \right) \ll \sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^4} \ll \frac{1}{(\ln a)^3}$$

d'après la question précédente. De plus, toujours d'après la question précédente :

$$\sum_{n \geq a} \frac{1}{n(\ln n)^3} \leq \frac{1}{2(\ln a)^2} + \frac{1}{a(\ln a)^3} = \frac{1}{2(\ln a)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln a)^3}\right)$$

Finalement

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, a \leq p \leq b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}, p \geq a} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \frac{1}{2(\ln a)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln a)^3}\right)$$

4. $x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^2}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale :

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{(\ln n)^2} \leq \frac{1}{(\ln 2)^2} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Or on a vu à la question III.2. que $\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(\ln x)^2}$ d'où

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{(\ln n)^2} \ll \frac{x}{(\ln x)^2}$$

5. Soit $n \leq x$ tel que tous les facteurs premiers de n sont supérieurs ou égaux à y . Alors $n = 1$ ou $n \geq y$, dans le second cas n est un nombre premier puisque sinon il existerait $p_1, p_2 \geq y$ des diviseurs premiers de n , on aurait alors $p_1 p_2 | n$ et donc $n \geq y^2 > x$ ce qui n'est pas. Si réciproquement $y \leq n \leq x$ est premier ou si $n = 1$ alors tous les facteurs premiers de n sont supérieurs ou égaux à y donc $\Phi(x, y) = \pi(x) - \pi(y-1) + 1$ d'où

$$|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leq 1 + |\pi(y) - \pi(y-1)| \leq 2$$

Ainsi d'après le théorème des nombres premiers,

$$\Phi(x, y) = \pi(x) - \pi(y) + \mathcal{O}(1) = \frac{x}{\ln x} - \frac{y}{\ln y} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) = \frac{x}{\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y}\right)$$

NB : l'énoncé contient une erreur, l'inégalité $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leq 1$ n'est pas tout le temps vraie, si $x = 4$ et $y = 3$ alors $1 < \sqrt{x} < y < x$, $\Phi(x, y) = 2$, $\pi(x) = 2$ et $\pi(y) = 2$ de sorte que $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| = 2$.

6. Pour $n \geq 2$ on note $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n et on pose $P^-(1) = +\infty$. On a alors

$$\Phi(x, y) = 1 + \sum_{2 \leq n \leq x} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}, p \geq y \\ P^-(n)=p}} 1 = \Phi(x, y') + \sum_{2 \leq n \leq x} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y' \\ P^-(n)=p}} 1 = \Phi(x, y') + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \sum_{\substack{2 \leq n \leq x \\ P^-(n)=p}} 1$$

Or $2 \leq n \leq x$ et $P^-(n) = p$ si et seulement si $1 \leq \frac{n}{p} \leq \frac{x}{p}$ et $P^-\left(\frac{n}{p}\right) \geq p$. Le nombre de tels entiers est donc $\Phi\left(\frac{x}{p}, p\right)$, on a alors

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y') + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < y'} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right)$$

7. (a) On opère le changement de variable $u = \frac{\ln x}{\ln t}$:

$$\int_y^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{t(\ln t)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln t} - 1\right)} dt = \int_2^{\frac{\ln x}{\ln y}} \frac{du}{u-1}$$

avec $\frac{\ln x}{\ln y} \in]2, 3]$. On opère ensuite le changement de variable $v = u - 1$:

$$\int_y^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{t(\ln t)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln t} - 1\right)} dt = \int_1^{\frac{\ln x}{\ln y} - 1} \frac{dv}{v} = \int_1^{\frac{\ln x}{\ln y} - 1} \omega(v) dv$$

car $\left[1, \frac{\ln x}{\ln y} - 1\right] \subset [1, 2]$. Finalement

$$1 + \int_y^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{t(\ln t)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln t} - 1\right)} dt = \frac{\ln x}{\ln y} \left(\frac{\ln y}{\ln x} + \frac{\ln y}{\ln x} \int_1^{\frac{\ln x}{\ln y} - 1} \omega(v) dv \right) = \frac{\ln x}{\ln y} \omega \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)$$

(b) Notons que toutes les variables utilisées ici se situent dans l'intervalle $[x^{1/3}, x]$ donc toutes les constantes derrière les \mathcal{O} sont ici des constantes absolues. D'après la question III.6. on a

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, \sqrt{x}) + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \Phi \left(\frac{x}{p}, p \right)$$

D'une part d'après la question III.5. on a

$$\Phi(x, \sqrt{x}) = \frac{x}{\ln x} + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2\sqrt{x}}{\ln x} \right) = \frac{x}{\ln x} + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^2} \right)$$

D'autre part si $y \leq p < \sqrt{x}$ est un nombre premier, alors d'après la question III.5.

$$\Phi \left(\frac{x}{p}, p \right) = \frac{x}{p \ln(x/p)} + \mathcal{O} \left(\frac{x}{p(\ln(x/p))^2} + \frac{p}{\ln p} \right) = \frac{x}{p \ln(x/p)} + \mathcal{O} \left(\frac{x}{p(\ln p)^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{p}{\ln p} \right)$$

Aussi d'après la question III.3.(c)

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \frac{x}{p \ln(x/p)} = \sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{x}{n \ln n \ln(x/n)} + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^3} \right) + \mathcal{O} \left(\sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{n}{(\ln n)^2} \left| \frac{x}{(n+1) \ln(x/(n+1))} - \frac{x}{n \ln(x/n)} \right| \right)$$

On vérifie que $t \mapsto \frac{x}{t(\ln t)^2 \ln(x/t)}$ est décroissante sur $[y, \sqrt{x}]$ donc par comparaison série-intégrale :

$$\sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{x}{n \ln n \ln(x/n)} = \int_y^{\sqrt{x}} \frac{x}{t(\ln t)^2 \ln(x/t)} dt + \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3} \right) = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \omega \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right) - 1 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^3} \right)$$

d'après la question précédente. De plus d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ et d'après la question III.3.(e) :

$$\sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{n}{(\ln n)^2} \left| \frac{x}{(n+1) \ln(x/(n+1))} - \frac{x}{n \ln(x/n)} \right| \ll \sum_{y \leq n < \sqrt{x}} \frac{x}{n(\ln n)^3} \ll \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Finalement

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \frac{x}{p \ln(x/p)} = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \omega \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right) - 1 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^2} \right)$$

Il reste enfin

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < \sqrt{x}} \frac{p}{\ln p} \ll \frac{3\sqrt{x} (\pi(\sqrt{x}) - \pi(x^{1/3}))}{\ln x} \ll \frac{x}{(\ln x)^2}$$

d'après le théorème des nombres premiers. On a finalement

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\ln y} \omega \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln x)^2} \right) = \frac{x}{\ln y} \omega \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x}{(\ln y)^2} \right)$$

(c) **NB : dans cette question j'utiliserai l'intégrale de Stieltjes qui allège les calculs.**

Soit pour $x \geq 2$,

$$T(x) := \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \frac{1}{p}$$

On établit d'abord le lemme suivant :

Lemme 1 : On a pour $x \geq 2$:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

Soit $p \in \mathcal{P}$ et $n \geq 2$, alors

$$v_p(n!) = \sum_{m=1}^n v_p(m) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^{v_p(m)} 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m \leq n, v_p(m) \geq k} 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Puisque l'avant-dernière somme correspond au nombre de multiples de p^k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui sont au nombre de $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

D'après l'encadrement $\frac{n}{p^k} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{p^k}$, on a

$$v_p(n!) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1} \text{ et } v_p(n!) \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \geq \frac{n}{p} - 1$$

Comme $\ln(n!) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} v_p(n!) \ln p$, on a d'une part

$$\ln(n!) \geq n \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \ln p \geq n \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \pi(n) \ln n = n \left(\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} + \mathcal{O}(1) \right)$$

d'après le théorème des nombres premiers. D'autre part

$$\ln(n!) \leq n \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p-1} = n \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} = n \left(\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} + \mathcal{O}(1) \right)$$

car $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{\ln k}{k(k-1)} < +\infty$. Comme de plus $\ln(n!) = n \ln n + \mathcal{O}(n)$ d'après la formule de Stirling, on a en réunissant les inégalités précédentes $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + \mathcal{O}(1)$. Dans le cas général, on a pour $x \geq 2$:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{\ln p}{p} = \ln \lfloor x \rfloor + \mathcal{O}(1) = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme 2 : Il existe une constante c_0 telle que

$$T(x) = \ln \ln x + c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

Soit pour $x \geq 2$,

$$R(x) := \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \frac{\ln p}{p} - \ln x$$

alors $R(x) = \mathcal{O}(1)$ d'après le lemme précédent. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, alors

$$T(x) = \int_{2-\varepsilon}^x \frac{1}{\ln t} d\left(\sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p}\right) = \int_{2-\varepsilon}^x \frac{dt}{t \ln t} + \int_{2-\varepsilon}^x \frac{dR(t)}{\ln t} = \ln \ln x - \ln \ln(2-\varepsilon) + \frac{R(x)}{\ln x} - \frac{R(2-\varepsilon)}{\ln(2-\varepsilon)} + \int_{2-\varepsilon}^x \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}$$

par intégration par parties. En faisant tendre ε vers 0^+ , on a

$$T(x) = \ln \ln x - \ln \ln 2 + \frac{R(x)}{\ln x} - 1 + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} dt$$

On a aussi, compte-tenu de $R(x) = \mathcal{O}(1)$, la majoration suivante :

$$\left| \frac{R(x)}{\ln x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} dt \right| \leq \|R\|_\infty \left(\frac{1}{\ln x} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \right) = \frac{2\|R\|_\infty}{\ln x} \ll \frac{1}{\ln x}$$

Ainsi, en posant $c_0 := 1 - \ln \ln 2 + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} dt$, on a le développement asymptotique souhaité.

On définit

$$\delta(x, y) := \frac{(\ln y)^2}{x} \Phi(x, y) - \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \ln y$$

de sorte que

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) + \frac{x\delta(x, y)}{(\ln y)^2}$$

Le résultat est immédiat si y est à valeurs dans un intervalle borné puisqu'alors $\Phi(x, y) = \mathcal{O}(x)$, on peut donc supposer sans pertes de généralités $y \geq y_0$ avec $y_0 \geq 0$ que l'on pourra plus tard choisir avantageusement. On pose pour $n \geq 2$

$$\delta_n := \sup \left\{ |\delta(x, y)|, x \geq 0, y \geq y_0, x^{\frac{1}{n+1}} \leq y < \sqrt{x} \right\}$$

On note pour $n \geq 2$, (\mathcal{H}_n) la proposition

$$(\mathcal{H}_n) : \delta_n \text{ est fini et borné indépendamment de } n$$

que nous allons montrer par récurrence.

• Le cas $n = 2$ a été traité à la question précédente.

• Soit $n \geq 2$ tel que (\mathcal{H}_n) est vraie et soient $x \geq 0$ et $y \geq y_0$ tels que $x^{\frac{1}{n+2}} \leq y < x^{\frac{1}{n+1}}$. D'après la question III.6. on a :

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, x^{1/3}) + \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right)$$

D'après la question précédente

$$\Phi(x, x^{1/3}) = \frac{x}{\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) = \frac{x}{\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln y)^2}\right)$$

car $x > y^2$. D'autre part

$$\Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) = \frac{x}{p \ln p} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln p} - 1\right) + \frac{x\delta\left(\frac{x}{p}, p\right)}{p(\ln p)^2}$$

Soit pour $v \geq 2$,

$$\rho(v) := \sum_{p \in \mathcal{P}, x^{1/v} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p}$$

alors d'après le lemme 2 et sachant $x > y^2$,

$$\rho(v) = T(\sqrt{x}) - T(x^{1/v}) = \ln\left(\frac{1}{2} \ln x\right) + c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right) - \ln\left(\frac{1}{v} \ln x\right) - c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{v}{\ln x}\right) = \ln\left(\frac{v}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln y}\right)$$

pour $2 \leq v \leq \frac{\ln x}{\ln y}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{x}{p \ln p} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln p} - 1\right) &= \frac{x}{\ln x} \int_3^{\frac{\ln x}{\ln y}} v\omega(v-1) d\rho(v) \\ &= \frac{x}{\ln x} \int_3^{\frac{\ln x}{\ln y}} \omega(v-1) dv + \frac{x}{\ln x} \int_3^{\frac{\ln x}{\ln y}} v\omega(v-1) d\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right) \\ &= \frac{x}{\ln x} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) - 3\omega(3)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln y)^2}\right) + \frac{x}{\ln x} \int_3^{\frac{\ln x}{\ln y}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln y}\right) d(v\omega(v-1)) \\ &= \frac{x}{\ln x} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) - 1\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\ln y)^2}\right) \end{aligned}$$

car $\frac{d}{dv}(v\omega(v)) = \omega(v-1)$. Aussi, pour $y \leq p < x^{1/3}$, on a $\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq x^{\frac{1}{n+2}} \leq y \leq p < \sqrt{x}$ donc $|\delta\left(\frac{x}{p}, p\right)| \leq \delta_n$, d'où

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{x\delta\left(\frac{x}{p}, p\right)}{p(\ln p)^2} \right| \leq x\delta_n \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{1}{p(\ln p)^2}$$

Or d'après la question 3.(e),

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \frac{1}{2(\ln y)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln y)^3}\right) = \frac{1}{2(\ln y)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln y)^2}\right)$$

On choisit y_0 de telle sorte que le $o\left(\frac{1}{(\ln y)^2}\right)$ soit inférieur ou égal à $\frac{1}{4(\ln y)^2}$ pour $y \geq y_0$. On a alors

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{x \delta\left(\frac{x}{p}, p\right)}{p(\ln p)^2} \right| \leq \frac{3x\delta_n}{4(\ln y)^2}$$

Soit $\vartheta(x, y) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$ tel que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, y \leq p < x^{1/3}} \frac{x \delta\left(\frac{x}{p}, p\right)}{p(\ln p)^2} = \frac{\vartheta(x, y)x\delta_n}{(\ln y)^2}$$

On a finalement pour $x^{\frac{1}{n+2}} \leq y < x^{\frac{1}{n+1}}$:

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) + \frac{x(\vartheta(x, y)\delta_n + \mathcal{O}(1))}{(\ln y)^2}$$

et pour $x^{\frac{1}{n+1}} \leq y < \sqrt{x}$, on a déjà :

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) + \frac{x\delta(x, y)}{(\ln y)^2}$$

avec $|\delta(x, y)| \leq \delta_n$. Il s'ensuit que $\delta_{n+1} \leq \max\left(\frac{3}{4}\delta_n + \mathcal{O}(1), \delta_n\right)$. On en déduit par hypothèse de récurrence que δ_{n+1} est fini. Si de plus $\delta_{n+1} \leq \frac{3}{4}\delta_n + \mathcal{O}(1)$, alors en remarquant que $\delta_n \leq \delta_{n+1}$, on a $\delta_{n+1} \leq \mathcal{O}(1)$, donc $\delta_{n+1} \leq \max(\mathcal{O}(1), \delta_n)$ et par hypothèse de récurrence, on peut majorer δ_{n+1} indépendamment de n .

Soit finalement $D := \sup_{n \geq 2} \delta_n = \sup_{1 < y < \sqrt{x}} |\delta(x, y)|$, alors pour tout $1 < y < \sqrt{x}$,

$$\left| \Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) \right| = \frac{x|\delta(x, y)|}{(\ln y)^2} \leq D \frac{x}{(\ln y)^2}$$

IV

1. (a) Soit $n \leq x$ alors tous les facteurs premiers de n sont supérieurs ou égaux à y si et seulement si $n \wedge q(y) = 1$ si et seulement si n est inversible dans $\mathbb{Z}/q(y)\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, q(y) - 1 \rrbracket$ premier avec $q(y)$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $n = k + \ell q(y)$. Or $n \leq x$ donc $\frac{-k}{q(y)} \leq \ell \leq \frac{x-k}{q(y)}$, il y a donc $\varphi(q(y))$ possibilités pour k et à k fixé il y a $\left\lfloor \frac{x-k}{q(y)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-k}{q(y)} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x-k}{q(y)} \right\rfloor + 1$ possibilités pour ℓ . Ainsi, comme $0 \leq k \leq q(y)$ on a

$$\varphi(q(y)) \left\lfloor \frac{x}{q(y)} \right\rfloor \leq \Phi(x, y) \leq \varphi(q(y)) \left(\left\lfloor \frac{x}{q(y)} \right\rfloor + 1 \right)$$

Il s'ensuit

$$\Phi(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \frac{\varphi(q(y))}{q(y)}$$

(b) Soit $x_y := y^y q(y)$, alors d'après l'inégalité de la question précédente :

$$\varphi(q(y)) \left\lfloor \frac{x_y}{q(y)} \right\rfloor \leq \Phi(x_y, y) \leq \varphi(q(y)) \left(\left\lfloor \frac{x_y}{q(y)} \right\rfloor + 1 \right)$$

Comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x_y}{q(y)} = +\infty$, on a

$$\Phi(x_y, y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} x_y \frac{\varphi(q(y))}{q(y)}$$

D'autre part $1 < y < x_y$ donc d'après la question III.7.(c), on a :

$$\Phi(x_y, y) = \frac{x_y}{\ln y} \omega\left(y + \frac{\ln q(y)}{\ln y}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x_y}{(\ln y)^2}\right) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_y}{\ln y} L$$

Il en découle que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(q(y))}{q(y)} \ln y = L$.

(c) D'après la question III.3.(c) on a :

$$\ln q(y) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p < y} \ln p = \sum_{n < y} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{y}{\ln y}\right) + \mathcal{O}\left(\sum_{n < y} \frac{n}{(\ln n)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ donc d'après la question III.4.

$$\sum_{n < y} \frac{n}{(\ln n)^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ll \sum_{n < y} \frac{1}{(\ln n)^2} \ll \frac{y}{(\ln y)^2} \ll \frac{y}{\ln y}$$

Finalement

$$\ln q(y) = y + \mathcal{O}\left(\frac{y}{\ln y}\right) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$$

2. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la i -ème ligne contient un nombre premier, si $i + (m+j)q$ est premier pour un certain $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ alors $i + (m+j)q \wedge q = 1$ puis $i \wedge q = 1$ donc tous les facteurs premiers de i sont supérieurs ou égaux à y . Le nombre de tels $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (et donc de telles lignes) est au plus $\Phi(n, y)$.

(b) On partitionne selon les colonnes de $M(m, n, q)$:

$$N = \sum_{j=1}^m |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid i + (m+j)q \in \mathcal{P}\}| = \sum_{j=1}^m [\pi(n + (m+j)q) - \pi((m+j)q)]$$

(c)

$$M_s \left(\frac{n}{\ln(mq)}\right)^{-1} \times M_a^{-1} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} = \frac{N \ln(mq)}{m} \times \frac{\Phi(n, y)}{N} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} = \frac{\Phi(n, y)}{n} \frac{q}{\varphi(q)}$$

3. On va montrer que le premier résultat est vrai. Pour $x \geq 1$, $q \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$, on note

$$\pi(x, q, a) := |\{p \in \mathcal{P} \mid p \leq x \text{ et } p \equiv a[q]\}|$$

Soit $\alpha > \max(\alpha_0, 2)$ tel que $\omega(\alpha) > L$ (un tel α existe d'après la question III.1.(g)). On pose $n := \lfloor y^\alpha \rfloor$, alors $n < q$ pour y assez grand puisque $\ln q \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$. On compte le nombre de nombres premiers dans $M(m, n, q)$ selon ses lignes :

$$N = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \wedge q = 1}} [\pi(i + 2mq, q, i) - \pi(i + mq, q, i)]$$

On admet que le théorème des nombres premiers en progression arithmétique permet de montrer que pour y assez grand,

$$\pi(i + 2mq, q, i) - \pi(i + mq, q, i) \gg \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)}$$

On en déduit que

$$N \gg \Phi(n, y) \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)}$$

Or $\alpha > 2$ donc $1 < y < \sqrt{n}$ donc d'après la question III.7.(c)

$$\Phi(n, y) = \frac{n}{\ln y} \omega\left(\frac{\ln n}{\ln y}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{n}{(\ln y)^2}\right) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{y^\alpha}{\ln y} \omega(\alpha)$$

De plus d'après la question IV.1.(b), $\frac{\varphi(q)}{q} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L}{\ln y}$ donc

$$N \gg \frac{y^\alpha \omega(\alpha)}{\ln y} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} \gg \frac{y^\alpha m}{\ln(mq)} \frac{\omega(\alpha)}{L}$$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ que l'on choisira plus tard avantageusement, on pose $m := q^{r-1}$. D'après la question IV.2.(c) au moins une colonne de $M(m, n, q)$ contient au moins $\frac{N}{m}$ nombres premiers, avec

$$\frac{N}{m} \gg \frac{y^\alpha}{\ln(q^r)} \frac{\omega(\alpha)}{L}$$

On fixe une de ces colonnes, soit $\ell_0 := (\ln(q^r))^{\alpha_0}$, on partitionne cette colonne en $k_0 := \left\lfloor \frac{n}{\ell_0} \right\rfloor + 1$ intervalles de même longueur $\ell_0(1 + o(1))$. Au moins un de ces intervalles contient au moins $\frac{N}{mk_0}$ nombres premiers, on en prend un de la forme $]x, x + \ell_0(1 + o(1))]$. Tous les coefficients de la matrice $M(m, n, q)$ sont minorés par mq donc $x \geq mq$, d'où $\ell_0 \leq (\ln x)^{\alpha_0} < (\ln x)^\alpha$, donc $\ell_0(1 + o(1)) \leq (\ln x)^\alpha$. Ainsi $]x, x + \ell_0(1 + o(1))] \subset]x, x + (\ln x)^\alpha]$ d'où

$$\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x) \geq \frac{N}{mk_0} \gg \frac{y^\alpha}{k_0 \ln(q^r)} \frac{\omega(\alpha)}{L} \gg (\ln(q^r))^{\alpha_0-1} \frac{\omega(\alpha)}{L}$$

puisque $k_0 \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{y^\alpha}{(\ln(q^r))^{\alpha_0}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit $r \gg \frac{1}{\ln q} (\ln x)^{\frac{\alpha-1}{\alpha_0-1}}$ tel que $\frac{N}{mk_0} \geq \left(\frac{\omega(\alpha)}{L} - \varepsilon \right) (\ln x)^{\alpha-1}$. Ainsi en posant $\lambda := \frac{\omega(\alpha)}{2L} + \frac{1}{2} > 1$, on a :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x)}{(\ln x)^{\alpha-1}} \geq \frac{\omega(\alpha)}{L} > \lambda$$