E3A 2007
MP - Maths B

Exercice 1

1. Suivant l'énoncé, soit y une fonction dérivable sur J, et soit $z : x \longmapsto |x|^\alpha y(x)$.

Puisque J ne contient pas 0, z est elle aussi dérivable sur J, et on a :

- si $J \subset \mathbf{R}_+^*$: $\forall x \in J \quad z'(x) = \alpha x^{\alpha-1}y(x) + x^\alpha y'(x) = x^{\alpha-1}\big(xy'(x) + \alpha y(x)\big)$.
- si $J \subset \mathbf{R}_-^*$: $\forall x \in J \quad z'(x) = -\alpha(-x)^{\alpha-1}y(x) + (-x)^\alpha y'(x) = -(-x)^{\alpha-1}\big(xy'(x) + \alpha y(x)\big)$.

Dans les deux cas, y est solution de l'équation homogène sur J si et seulement si $z' = 0$ sur J ; les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto C/|x|^\alpha$, où C est une constante (réelle ou complexe suivant le type de solutions recherchées).

2. Notons déjà qu'une fonction est solution d'une équation différentielle sur I, si et seulement si ses restrictions à $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ sont solutions de cette équation respectivement sur chacun de ces intervalles.

2a) D'après la question **1.** et la remarque précédente, une fonction f est solution de l'équation homogène sur I si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 tels que $f(x) = C_1|x|^{-\alpha}$ pour tout $x < 0$, et $f(x) = C_2|x|^{-\alpha}$ pour tout $x > 0$.

2b) Puisque $\alpha > 0$, une telle fonction ne peut avoir une limite finie en 0 que si $C_1 = C_2 = 0$; la seule solution ayant une limite finie en 0 est donc la fonction nulle.

3. On utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires du premier ordre : si A est un intervalle de $\mathbf{R}$, si a et b sont deux fonctions définies et continues sur A à valeurs dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et si $(t_0, y_0) \in A \times K$, alors le problème de Cauchy $y' + ay = b$, $y(t_0) = y_0$ admet une et une seule solution sur A.

Ici l'équation s'écrit sur $\mathbf{R}_-^*$: $y' + (\alpha/x)y = F(x)/x$. Puisque F est somme d'une série entière sur $\mathbf{R}$, elle est continue sur $\mathbf{R}$ et donc les fonctions coefficients $x \longmapsto \alpha/x$ et $x \longmapsto F(x)/x$ sont continues sur l'intervalle $\mathbf{R}_-^*$. Le problème de Cauchy $y' + (\alpha/x)y = F(x)/x$, $y(-1) = a$ a donc une et une seule solution f_1 sur $\mathbf{R}_-^*$.

Pour les mêmes raisons, le problème de Cauchy $y' + (\alpha/x)y = F(x)/x$, $y(1) = b$ a une et une seule solution f_2 sur $\mathbf{R}_+^*$. Le problème posé a donc une et une seule solution, la fonction f dont les restrictions à $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$ sont respectivement f_1 et f_2.

4. Supposons trouvées deux telles solutions f_1 et f_2. L'équation $\mathcal{E}$ étant linéaire, un calcul immédiat montre alors que $f_1 - f_2$ est solution sur I de l'équation homogène associée ; et a évidemment aussi une limite finie en 0.

D'après **2b)**, $f_1 - f_2$ est donc la fonction nulle ; l'équation $\mathcal{E}$ a donc au plus une solution ayant une limite finie en 0.

5a) Puisque f est somme d'une série entière, on sait que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et que $f'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1}$ pour tout $x \in \,]-R, R[$. On a donc

$$\begin{aligned}
\forall x \in \,]-R,R[\quad xf'(x) + \alpha f(x) = F(x) &\iff \forall x \in \,]-R,R[\quad x\sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} + \alpha \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = F(x) \\
&\iff \forall x \in \,]-R,R[\quad \alpha a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty}(i+\alpha)a_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty}\beta_i x^i \\
&\iff a_0 = \frac{\beta_0}{\alpha} \text{ et } \forall i \geq 1 \quad a_i = \frac{\beta_i}{i+\alpha}
\end{aligned}$$

la denière équivalence étant justifiée par l'unicité du développement en série entière. On a donc finalement $a_i = \beta_i/(i+\alpha)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

On en déduit en particulier $|a_i| = O(|\beta_i|)$ quand i tend vers $+\infty$; et donc, pour tout $x \neq 0$, $|a_i x^i| = O(|\beta_i x^i|)$. Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum \beta_i x^i$ est infini, on sait qu'elle converge absolument pour tout x ; la relation précédente montre alors que $\sum a_i x^i$ converge aussi pour tout x, et donc $R = +\infty$.

5b) Avec les notations de l'énoncé, on vient de voir que la série entière définissant g a un rayon de convergence infini ; de plus, en remontant les calculs du **5a)** (on a raisonné par équivalences), on constate que la fonction g est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[= \mathbf{R}$. Puisque le **5a)** montre que c'est la seule solution développable en série entière possible, on a bien le résultat demandé.

5c) En particulier, la restriction de g à I est solution de $\mathcal{E}$ sur I, et a une limite finie β_0/α en 0. L'équation $\mathcal{E}$ a donc exactement une solution sur I ayant une limite finie en 0, et cette limite est β_0/α.

6a) La fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}e^t$ est continue sur $]0, x]$; de plus, elle est positive sur cet intervalle, et équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$. Enfin $\alpha - 1 > -1$, donc $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, x]$. Donc finalement $t \longmapsto t^{\alpha-1}e^t$ est bien intégrable sur $]0, x]$.

6b) Puisque $t \longmapsto t^{\alpha-1}e^t$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto \int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ (on peut par exemple se ramener à l'intégrale "classique" fonction de sa borne supérieure en découpant en $\int_0^1 + \int_1^x$), de dérivée $x \longmapsto x^{\alpha-1}e^x$.

On en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$; et que, pour tout $x > 0$:

$$xh'(x) + \alpha h(x) = x\Big(-\alpha x^{-\alpha-1}\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt + x^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^x\Big) + \alpha x^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt = e^x$$

donc h est bien solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

6c) Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $t = xu$ dans l'intégrale définissant $h(x)$ (changement de variable légal puisque $u \longmapsto xu$ est clairement un C^1-difféomorphisme de $]0, 1]$ dans $]0, x]$). Un calcul immédiat donne $h(x) = \int_0^1 u^{\alpha-1}e^{xu}\,du$.

Notons que, puisque $u \longmapsto u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$, cette formule permet de prolonger naturellement h en 0 en posant $h(0) = \int_0^1 u^{\alpha-1}\,du = 1/\alpha$.

Montrons que la fonction h ainsi prolongée est continue sur $[0, 1]$. On utilise pour cela le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre :

- pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $u \longmapsto u^{\alpha-1}e^{xu}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1]$.
- pour tout $u \in]0, 1]$, la fonction $x \longmapsto u^{\alpha-1}e^{xu}$ est continue sur $[0, 1]$.
- pour tout $(x, u) \in [0, 1] \times]0, 1]$, on a $|u^{\alpha-1}e^{xu}| \leq eu^{\alpha-1}$, et cette dernière fonction, indépendante de x, est intégrable sur $]0, 1]$.

On sait qu'alors la fonction h est continue sur $[0, 1]$.

Donc la fonction h initiale (avant prolongement) a pour limite $h(0) = 1/\alpha$ quand x tend vers 0^+.

6d) Notons déjà que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, donc qu'on est bien sous les hypothèses des questions précédentes.

D'autre part, les raisonnements faits en **2b)** et **4.** restent clairement valables si l'on remplace l'ensemble I par l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$. On peut donc en conclure que l'équation $\mathcal{E}$ a au plus une solution sur $\mathbf{R}_+^*$ admettant une limite finie en 0 ; et la question précédente montre alors qu'il y a exactement une telle fonction, qui est la fonction h.

Enfin la question **5.** montre que la fonction g qui y est définie fournit aussi une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ ayant une limite finie en 0 ; donc $\forall x > 0 \quad h(x) = g(x)$ ce qui fournit le résultat demandé en utilisant le développement en série entière usuel de l'exponentielle.

Exercice 2

1a) La fonction f est un polynôme en x et y, donc est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

1b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3{x_0}^2 - 3(1 + {y_0}^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -6x_0y_0$.

1c) C'est immédiat.

1d) On a, pour tout $(h,k)\in\mathbf{R}^2$: $\quad f(1+h,k)=(1+3h+3h^2+h^3)-3(1+h)(1+k^2)=-2+3h^2-3k^2+h^3-3hk^2$.

Prenons pour norme sur $\mathbf{R}^2$ la norme définie par $\|(x,y)\|=\max\{|x|,|y|\}$ (les normes sur $\mathbf{R}^2$ étant toutes équivalentes, le choix de la norme n'influe pas sur le résultat). On a alors, pour tout $(h,k)\in\mathbf{R}^2$, $|h|\leq\|(h,k)\|$ et donc $\quad |h^3|\leq\|(h,k)\|^3=o(\|(h,k)\|^2)\quad$ au voisinage de $(0,0)$; de même, $hk^2=o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$. Par suite, toujours au voisinage de $(0,0)$:

$$f(1+h,k)=-2+3(h^2-k^2)+o(\|(h,k)\|^2)$$

La forme quadratique $q\ :\ (h,k)\longmapsto 3(h^2-k^2)$ n'a pas un signe constant (par exemple $q(1,0)>0$ et $q(0,1)<0$) ; on sait qu'alors f ne présente pas d'extremum en $(1,0)$.

1e) De même, on a $\quad f(-1+h,k)=2-3(h^2-k^2)+o(\|(h,k)\|^2)\quad$ au voisinage de $(0,0)$. Pour les mêmes raisons qu'en **1d)**, f ne présente pas d'extremum en $(-1,0)$.

1f) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbf{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f. Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite f n'a pas d'extremum local.

2a) La fonction g, restriction de f à D, est continue sur D. De plus, D est un fermé de $\mathbf{R}^2$ (image réciproque du fermé $[0,1]$ par l'application continue $(x,y)\longmapsto x^2+y^2$), et est clairement borné ; c'est donc un compact de $\mathbf{R}^2$.

On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; donc g a un maximum A en un point de D, et un minimum a en un point de D.

2b) Supposons que A soit atteint en un point (x_0,y_0) de $D'=D\setminus C$. Alors la restriction de g à D' présenterait un maximum en (x_0,y_0). De plus, D' est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ (c'est le disque unité ouvert) et g est C^1 sur D' ; donc (x_0,y_0) serait un point critique de g, donc de f.

Or on a vu que les seuls points critiques de f sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui n'appartiennent pas à D' ; les extremums de g ne peuvent donc pas être atteints en un point de D', ils le sont donc forcément sur C.

2c) Pour tout $t\in\mathbf{R}$: $g(\cos t,\sin t)=\cos^3 t-3\cos t(2-\cos^2 t)=2\cos t(2\cos^2 t-3)$.

Quand t décrit $\mathbf{R}$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$. Étudions donc les variations de $\varphi\ :\ u\longmapsto 2u(2u^2-3)$ sur $[-1,1]$. On a, pour tout $u\in[-1,1]$, $\quad \varphi'(u)=6(2u^2-1)\quad$ d'où le tableau de variations :

u	-1		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi(u)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

Puisque $(\cos t,\sin t)$ décrit C quand t décrit $\mathbf{R}$, et que $g(\cos t,\sin t)=\varphi(\cos t)$ pour tout t, le maximum de g sur C est atteint en chaque point $(\cos t,\sin t)$ pour lequel $\varphi(\cos t)$ est maximal, c'est à dire pour lequel $\cos t=-1/\sqrt{2}$. Par suite $A=2\sqrt{2}$, et est atteint en $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2},-1\sqrt{2})$.

2d) De même, $a=-2\sqrt{2}$ et est atteint en $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2},-1\sqrt{2})$.

Exercice 3

1. C'est immédiat.

2. La première colonne de J_n est non nulle, et toutes les autres colonnes lui sont égales ; donc J_n est de rang 1, et son espace image est engendré par sa première colonne. Cette image est donc la droite de $\mathbf{R}^n$ constituée des n-uplets $(x_1,\ldots,x_n)$ vérifiant $x_1=\cdots=x_n$.

La formule du rang montre alors que le noyau de J_n est de dimension $n-1$.

3. Le produit d'une ligne quelconque de J_n par une colonne quelconque vaut $n.(1/n^2)=1/n$. Les coefficients de ${J_n}^2$ valent donc tous $1/n$, donc $\quad {J_n}^2=J_n$.

4. La question précédente montre que le polynôme $X^2-X=X(X-1)$ annule J_n. Puisque ce polynôme est scindé à racines simples, la matrice J_n est donc diagonalisable.

Ses valeurs propres sont de plus racines du polynôme annulateur, donc appartiennent à $\{0,1\}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau de J_n ; puisque J_n est diagonalisable, la multiplicité de cette valeur propre est égale à la dimension du noyau, c'est à dire $n-1$ (et donc 0 est effectivement valeur propre si et seulement si $n \geq 2$).

Puisque la somme des multiplicités vaut n, 1 est valeur propre d'ordre 1.

5a) Soit $x \in \mathbf{R}$; alors $\det(M + xJ_n) = x^n \det J_n$ donc

- si $n = 1$, alors $\det J_n = 1$ et donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{0\}$.
- si $n \geq 2$, alors $\det J_n = 0$ puisque J_n est de rang $1 < n$, et donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathbf{R}$.

5b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x = 0$, alors $\det(M + xJ_n) = \det I \neq 0$.

Supposons maintenant $x \neq 0$. On a alors $\det(I + xJ_n) = x^n \det\big(J_n + (1/x)I\big)$, et donc $x \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$ si et seulement si $-1/x$ est racine (évidemment non nulle) du polynôme caractéristique de J_n.

La question **4.** fournit donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{-1\}$.

5c-i) Si $\mathbf{w} \in \ker(M + xJ_n)$, alors $M\mathbf{w} = -xJ_n\mathbf{w} \in \operatorname{Im} J_n$ et $\operatorname{Im} J_n$ est engendré par $\mathbf{v}$ d'après la question **2.** ; par suite $M\mathbf{w}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$, et donc $\mathbf{w} = M^{-1}(M\mathbf{w})$ est colinéaire à $M^{-1}\mathbf{v}$.

5c-ii) On a $(M + xJ_n)\mathbf{w} = \mathbf{v} + xJ_n\mathbf{w}$. Les coordonnées de $\mathbf{v}$ valent toutes 1, celles de $J_n\mathbf{w}$ toutes σ/n ; les coordonnées de $(M + xJ_n)\mathbf{w}$ valent donc toutes $1 + x\sigma/n$, ce qui fournit immédiatement l'équivalence demandée.

D'après **5c-i)**, le noyau de $M + xJ_n$ est un sous-espace de la droite vectorielle engendrée par $M^{-1}\mathbf{v}$ (qui est évidemment non nul) ; donc

- soit $M^{-1}\mathbf{v}$ appartient à ce noyau, et dans ce cas le noyau est la droite toute entière. La matrice n'est alors pas régulière, on a donc $\det(M + xJ_n) = 0$.
- soit $M^{-1}\mathbf{v}$ n'appartient pas à ce noyau, et dans ce cas le noyau est $\{0\}$. On a donc $\det(M + xJ_n) \neq 0$.

Le raisonnement précédent permet donc d'en déduire :

- si $\sigma = 0$, alors, pour tout x, $M^{-1}\mathbf{v} \notin \ker(M + xJ_n)$; donc le déterminant de $M + xJ_n$ est non nul pour tout x. Dans ce cas $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \emptyset$.
- si $\sigma \neq 0$, alors $M^{-1}\mathbf{v} \in \ker(M + xJ_n)$ si et seulement si $x = -n/\sigma$, qui est donc la seule valeur de x pour laquelle $\det(M + xJ_n) = 0$; et donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{-n/\sigma\}$.

5d-i) Ici $\det M = 0$, donc $0 \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$.

5d-ii) Soit $x \in \mathbf{R}$. Il est immédiat que x est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement si $b + x \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$. L'application $x \longmapsto b + x$ réalise donc une bijection de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.

5d-iii) On en déduit que :

- s'il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $M + bJ_n$ soit régulière, alors, avec les notations de la question précédente, le cardinal de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est égal au nombre de solutions de $(\mathcal{F})$. Or l'équation $(\mathcal{F})$ peut se réécrire $\det(P + xJ_n) = 0$ où $P = M + bJ_n$ est inversible. D'après **5c)**, $(\mathcal{F})$ a donc au plus une solution, et donc $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ contient au plus un élément. Puisqu'il contient 0, on a donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{0\}$.
- sinon, on a $\det(M + bJ_n) = 0$ pour tout $b \in \mathbf{R}$, et donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathbf{R}$.

6a) Posons $M = (m_{ij})$, et notons, pour tout couple (i, j), c_{ij} le cofacteur de m_{ij}, donc l'élément situé ligne i colonne j dans la comatrice de M.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Remarquons tout d'abord que les colonnes de xJ_n sont toutes égales à $(x/n)\mathbf{v}$; pour alléger les écritures, on posera $y = x/n$ dans la suite. Pour tout j, notons enfin C_j la j-ème colonne de M.

Les colonnes de $M + xJ_n$ sont alors les colonnes $C_j + y\mathbf{v}$. On peut alors développer $\det(M + xJ_n)$ en utilisant la multilinéarité par rapport aux colonnes. On obtient la somme des déterminants vérifiant : pour tout j, la colonne j du déterminant vaut soit C_j, soit $y\mathbf{v}$. Ces déterminants sont de trois types :

- un et un seul d'entre eux est composé des colonnes $C_1, \ldots, C_n$: il vaut $\det M$.
- on obtient d'autre part les n déterminants obtenus en remplaçant une et une seule colonne de $\det M$ par la colonne $y\mathbf{v}$; nous noterons D_j celui dans lequel la colonne C_j a été remplacée.
- enfin, tous les autres déterminants ont au moins deux colonnes égales à $y\mathbf{v}$, donc sont nuls.

On a donc $\det(M + xJ_n) = \det M + \sum_{j=1}^{n} D_j$. Soit alors $j \in \{1, \ldots, n\}$. Puisque les colonnes d'indices distincts de j de D_j sont celles de M, chaque cofacteur dans D_j d'un élément de la colonne j, est égal au cofacteur dans M de l'élément situé en même position. En développant D_j suivant la colonne j, on obtient donc $D_j = \sum_{i=1}^{n} yc_{ij}$.

On a donc finalement $f(x) = \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\Big)x + \det M$ qui est l'expression cherchée, avec α égal à la somme des cofacteurs de M divisée par n, et $\beta = \det M$.

6b) L'équation $\mathcal{E}$ s'écrit alors $\alpha x + \beta = 0$. On en déduit :

- si $\beta = \det M \neq 0$, c'est à dire si M est inversible, alors
  - soit $\alpha \neq 0$, et alors l'équation a une et une seule solution.
  - soit $\alpha = 0$, et alors l'équation n'a pas de solution.
- si M n'est pas inversible, alors
  - soit $\alpha \neq 0$, et alors l'équation a une et une seule solution, qui est 0.
  - soit $\alpha = 0$, et alors tout réel est solution.