

PROBLEME 1

Q1– Soit $V \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $P(V=1) = p$ et $P(V=0) = 1-p$

Q2– On sait que $E(V) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$; et, d'après la formule de transfert, $E(V^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) = p$; donc $E(V^2)$ existe et ainsi $V \in \mathcal{V}_d^2$

Q3– Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i]) \times P([Y = y_j])$$

on en conclut que :

$$r_{ij} = p_i \times q_j \iff X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

Q4– On applique à nouveau la formule de transfert :

$X \in \mathcal{V}_d^2$, donc $E(X^2)$ existe et X est d'espérance finie, ainsi on peut écrire :

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 P([X = x_i]); \text{ soit } E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i x_i^2$$

De même, on a : $E(Y^2) = \sum_{j \in \mathbb{N}} q_j y_j^2$

Q5– Les événements $([Y = y_j])_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on en déduit pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P([X = x_i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]), \text{ soit } p_i = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}$$

On a montré que $E(X^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i x_i^2$; donc : $E(X^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij} x_i^2$

De même, les événements $([X = x_i])_{i \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements, donc

$$P([Y = y_j]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]), \text{ soit } q_j = \sum_{i=0}^{+\infty} r_{ij}, \text{ et donc } E(Y^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} r_{ij} y_j^2$$

Q6– Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(x - y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \iff xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;

de même : $(x + y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \iff -xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

Si x et y sont de même signe, alors $|xy| = xy$ et si x et y sont de signes contraires, alors $|xy| = -xy$;

dans tous les cas, on a bien montré : $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

Q7– Tout d'abord $XY(\Omega) = \{x_i y_j, (i, j) \in \mathbb{N}^2\}$.

Ensuite, si elle existe, l'espérance du produit XY est $\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i y_j r_{ij}$

D'après le résultat précédent, on peut écrire : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, |x_i y_j| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + y_j^2)$; or on sait que X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, donc, par linéarité, on peut dire que la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ est d'espérance finie, et, en appliquant le résultat de l'énoncé, on en conclut que XY est d'espérance finie

$$E(XY) \leq \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i y_j r_{ij} \right| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_i y_j| r_{ij}, \text{ par inégalité triangulaire;}$$

de plus, on sait que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, |x_i y_j| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + y_j^2)$, donc :

$$E(XY) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2}(x_i^2 + y_j^2) r_{ij} \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i^2 r_{ij} + y_j^2 r_{ij} \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} x_i^2 r_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} y_j^2 r_{ij}$$

$$\text{ce qui donne bien : } E(XY) \leq \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Y^2))$$

Q8– Tout d'abord, la variable aléatoire nulle N , de loi certaine, vérifie $P(N = 0) = 1$, $E(N) = 0$ et $E(N^2) = 0$ et donc appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

Soient X et Y deux variables aléatoires de $\mathcal{V}_d^2$ et λ un réel; on pose $Z = \lambda X + Y$.

Il est clair que Z est une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω . Montrons que $E(Z^2)$ existe :

$Z^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$; les variables X^2 et Y^2 sont d'espérances finies par définition de X et Y , et, d'après la question précédente, la variable XY est également d'espérance finie; on en conclut par linéarité que Z^2 est d'espérance finie et donc que $Z = \lambda X + Y \in \mathcal{V}_d^2$.

On a montré que $\mathcal{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω

Q9– $Z(\Omega) = \{1\}$ et $P([Z = 1]) = 1$

Q10– $E(Z^2) = 1^2 \times P([Z = 1]) = 1$ et donc $Z \in \mathcal{V}_d^2$

Q11– Soit $X \in \mathcal{V}_d^2$, on sait que $Z \in \mathcal{V}_d^2$, on peut donc appliquer le résultat de la question **Q7** :

$$XZ \text{ est d'espérance finie et : } E(XZ) \leq \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Z^2)) \leq \frac{1}{2}(E(X^2) + 1)$$

Posons $X(\Omega) = \{x_i\}$ et $P([X = x_i]) = p_i$; on sait que $Z(\Omega) = \{1\}$, et $P([Z = 1]) = 1$; on a donc $x_i \times 1 = x_i$ et

$$P([X = x_i] \cap [Z = 1]) = P([X = x_i]) = p_i; \text{ alors } E(XZ) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i p_i = E(X). \text{ On en déduit donc :}$$

$$E(X) \leq \frac{1}{2}(1 + E(X^2))$$

Q12– $(X - E(X))(Y - E(Y)) = XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)$; par linéarité, on a donc :

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y), \text{ soit :}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (1)$$

Q13– Soit $X \in \mathcal{V}_d^2$, alors $E(X^2)$ existe, donc X admet une variance égale à $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$; de même, si $Y \in \mathcal{V}_d^2$, alors Y admet une variance $V(Y)$.

D'après la question **Q7**, $E(XY)$ existe, donc en appliquant la formule (1), on en déduit que :

$$X \text{ et } Y \text{ admettent une covariance } \text{cov}(X, Y)$$

Q14–

$$\begin{aligned} P([V_1 = 1]) &= P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 0]) \\ &\quad + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 0] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 0] \cap [V_3 = 0]) \\ &= 0 + p_3 + p_2 + 0 = 1 - p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P([V_1 = 0]) &= P([V_1 = 0] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 0] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 0]) \\ &\quad + P([V_1 = 0] \cap [V_2 = 0] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 0] \cap [V_2 = 0] \cap [V_3 = 0]) \\ &= p_1 + 0 + 0 + 0 = p_1 \end{aligned}$$

De même, on montre que $P([V_2 = 1]) = 1 - p_2$; $P([V_2 = 0]) = p_2$ et $P([V_3 = 1]) = 1 - p_3$; $P([V_3 = 0]) = p_3$

Les variables V_1 , V_2 et V_3 sont bien des variables de Bernoulli de paramètres respectifs $1 - p_1$, $1 - p_2$ et $1 - p_3$.

Q15–

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= P([V_1 = 0] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 0] \cap [V_3 = 1]) \\ &\quad + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 0]) = p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{aligned}$$

S suit une loi certaine, donc $V(S) = 0$

Q16– $\text{cov}(V_1, V_2) = E(V_1 V_2) - E(V_1)E(V_2)$; avec $E(V_1) = 1 - p_1$ et $E(V_2) = 1 - p_2$;

$$E(V_1 V_2) = 1 \times 1 \times P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1]) = P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 1]) + P([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1] \cap [V_3 = 0])$$

donc $E(V_1 V_2) = p_3$ et ainsi : $\text{cov}(V_1, V_2) = p_3 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_3 - 1 + p_1 + p_2 - p_1 p_2$ soit :

$$\boxed{\text{cov}(V_1, V_2) = -p_1 p_2} \text{ et, par propriété d'une variable de Bernoulli, } \boxed{V(V_1) = p_1(1 - p_1)}$$

Q17– Si $i = j$, $\text{cov}(V_i, V_j) = \text{cov}(V_i, V_i) = E(V_i^2) - (E(V_i))^2 = V(V_i) = p_i(1 - p_i)$ et si $i \neq j$, $\text{cov}(V_i, V_j) = -p_i p_j$;
donc :

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{Q18} - \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - p_1(p_1 + p_2 + p_3) \\ p_2 - p_2(p_1 + p_2 + p_3) \\ p_3 - p_3(p_1 + p_2 + p_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de K associé à la valeur propre 0

Q19– $p_1(1 - p_1) \neq 0$, on peut utiliser ce coefficient comme pivot :

$$\begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow (1 - p_1)L_3 + p_3 L_1]{L_2 \leftarrow (1 - p_1)L_2 + p_2 L_1} \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ 0 & p_2 p_3 & -p_2 p_3 \\ 0 & -p_2 p_3 & p_2 p_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 - p_1 & -p_2 & -p_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rg}(K) = 2}$$

Ainsi, d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension 1, et donc

$$\boxed{\text{Ker}(K) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Q20– Si $p_2 = p_3 = p$, alors $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 1 - 2p$ et

$$K = \begin{pmatrix} 2p(1 - 2p) & -p(1 - 2p) & -p(1 - 2p) \\ -p(1 - 2p) & p(1 - p) & -p^2 \\ -p(1 - 2p) & -p^2 & p(1 - p) \end{pmatrix}$$

$$pI_3 - K = \begin{pmatrix} p(-1 + 4p) & p(1 - 2p) & p(1 - 2p) \\ p(1 - 2p) & p^2 & p^2 \\ p(1 - 2p) & p^2 & p^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4p - 1 & 1 - 2p & 1 - 2p \\ 1 - 2p & p & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $p \neq \frac{1}{3}$, alors $\text{rg}(pI_3 - K) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(pI_3 - K)) = 1$ et donc :

$\boxed{\text{si } p \neq \frac{1}{3}, p \text{ est valeur propre de } K \text{ d'espace propre de dimension 1}}$

$$\text{Si } p = \frac{1}{3}, \text{ alors } pI_3 - K \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(pI_3 - K) = 1 \Rightarrow \dim(\text{Ker}(pI_3 - K)) = 2$$

$\boxed{\text{si } p = \frac{1}{3}, p \text{ est valeur propre de } K \text{ d'espace propre de dimension 2}}$

Q21– Tout d'abord, K étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc, semblable à une matrice diagonale. On sait que la trace est invariante par changement de base, donc la trace d'une matrice diagonalisable est égale à la somme de ses valeurs propres. Pour finir, une fois les valeurs propres déterminées, il est possible d'en déduire le polynôme caractéristique, car on sait que ce polynôme est unitaire et admet les valeurs propres pour racines.

$\text{Tr}(K) = 2p(1-2p) + 2p(1-p) = 2p(2-3p) = 4p-6p^2$ et on sait que 0 et p sont les deux premières valeurs propres, ainsi $\boxed{\text{Sp}(K) = \{0, p, 3p(1-2p)\}}$ et alors $\boxed{\chi_K(x) = x(x-p)(x-3p(1-2p))}$

Q22 – $K = \begin{pmatrix} V(V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & V(V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & V(V_3) \end{pmatrix}$, or, d'après la définition de $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,

on en déduit que $\forall i \neq j$, $\text{cov}(V_i, V_j) = \text{cov}(V_j, V_i)$ et donc que $\boxed{K \text{ est une matrice symétrique}}$

K est une matrice symétrique réelle, donc, par théorème, $\boxed{K \text{ est diagonalisable}}$

Q23 – $V(W) = E(W^2) - (E(W))^2$, avec

$$W^2 = x_1^2 V_1^2 + x_2^2 V_2^2 + x_3^2 V_3^2 + 2x_1 x_2 V_1 V_2 + 2x_2 x_3 V_2 V_3 + 2x_1 x_3 V_1 V_3 \quad \text{et}$$

$$(E(W))^2 = x_1^2 (E(V_1))^2 + x_2^2 (E(V_2))^2 + x_3^2 (E(V_3))^2 + 2x_1 x_2 E(V_1)E(V_2) + 2x_2 x_3 E(V_2)E(V_3) + 2x_1 x_3 E(V_1)E(V_3)$$

il vient :

$$\begin{aligned} V(W) &= x_1^2 V(V_1) + x_2^2 V(V_2) + x_3^2 V(V_3) + 2x_1 x_2 \text{cov}(V_1, V_2) + 2x_2 x_3 \text{cov}(V_2, V_3) + 2x_1 x_3 \text{cov}(V_1, V_3) \\ &= x_1^2 \text{cov}(V_1, V_1) + x_2^2 \text{cov}(V_2, V_2) + x_3^2 \text{cov}(V_3, V_3) + 2x_1 x_2 \text{cov}(V_1, V_2) + 2x_2 x_3 \text{cov}(V_2, V_3) + 2x_1 x_3 \text{cov}(V_1, V_3) \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j) = V(W), \text{ or une variance est positive donc :}$$

$$\boxed{\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j) \geq 0}$$

Q24 – On rappelle que $K = \begin{pmatrix} V(V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & V(V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & V(V_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cov}(V_1, V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & \text{cov}(V_2, V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & \text{cov}(V_3, V_3) \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors :

$$X^T K X = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \text{cov}(V_1, V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & \text{cov}(V_2, V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & \text{cov}(V_3, V_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j)$$

Le résultat de la question **Q23** s'écrit donc : $\boxed{\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, X^T K X \geq 0}$

Soit λ une valeur propre de K associée au vecteur X ; on a donc $KX = \lambda X$.

Ainsi, $X^T K X \geq 0 \Leftrightarrow X^T \lambda X \geq 0 \Leftrightarrow \lambda X^T X \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \|X\|^2 \geq 0$, où $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; on a $\|X\|^2 \geq 0$, donc :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } K \text{ si, et seulement si } \lambda \geq 0}$$

PROBLEME 2

Q25– La fonction f est définie par $f(x) = \text{Arcsin}(2x-1)$. La fonction $u \mapsto \text{Arcsin}(u)$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, et dérivable sur $] -1, 1[$; or $2x-1 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [0, 1]$ donc :

f est définie et continue sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}}; \text{ soit } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Q26– Soit g une fonction constante sur $]0, 1[$, alors, $\forall x \in]0, 1[$, $g'(x) = g''(x) = 0$ et g est bien solution de (E_0)

Q27– $\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x-1+x}{2(x(x-1))} = \frac{2x-1}{2(x(x-1))} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}$, donc on a bien : $\frac{16x-8}{16(x^2-x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$

Q28– $\begin{cases} z = y' \\ 16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' \\ 16(x^2-x)z' + (16x-8)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' \\ z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)}z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} z = y' \\ 16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' \\ z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right)z = 0 \end{cases}$$

Q29– Pour $x \in]0, 1[$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$ est donnée par :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x) = \ln(\sqrt{x-x^2})$$

Les solutions de (E^*) sur $]0, 1[$ sont donc définies par

$$z(x) = C e^{-\ln(\sqrt{x(1-x)})} = \frac{C}{\sqrt{x(1-x)}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Q30– On sait que $\begin{cases} z = y' \\ z \text{ solution de } (E^*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' \\ y \text{ solution de } (E_0) \end{cases}$

Les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont donc définies par :

$$y(x) = C \text{Arcsin}(2x-1) + D, \text{ avec } (C, D) \in \mathbb{R}^2$$

Q31– y est développable en série entière au voisinage de 0 et coïncide avec sa série entière sur $] -R, R[$, donc, par théorème, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$

Q32– $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donc $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$,

en comptant, cette fois, les termes nuls dans $y'(x)$ et $y''(x)$; y est solution de (E_μ) si, et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0$$

on pose $n := n-1$ dans la deuxième et la quatrième somme, l'égalité est donc équivalente à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 8(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [16n(n-1) a_n - 16n(n+1) a_{n+1} + 16n a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu a_n] x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}] x^n = 0$$

Q33– Une série entière est nulle si, et seulement si les coefficients sont nuls, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0$

◇ *Initialisation* : $a_1 = \frac{-\mu}{8}a_0$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

◇ *Hérédité* : Supposons que pour un certain n , $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0$; par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu)}{4^{n+1} (2n+2)(2n+1)(2n)!} a_0 = \frac{\prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu)}{4^{n+1} (2n+2)!} a_0 \end{aligned}$$

◇ *Conclusion* : On a montré par récurrence :

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0$$

Q34 – Il est clair que si $a_0 = 0$, alors $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; y est la fonction nulle et son rayon est $+\infty$

Q35 – Soit $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$. Dans un produit, si un facteur est nul, alors le produit est nul, donc tout produit ayant pour facteur $16p^2 - \mu$ est nul, ainsi $a_n = 0$ pour tout $n \geq p + 1$.

On en conclut que y est alors polynomiale de degré p

Q36 – Soit $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Alors $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = a_n x^n$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{16n^2}{16n^2} |x| = |x|; \text{ d'après le critère de d'Alembert :}$$

si $|x| < 1$, alors la série est absolument convergente, et si $|x| > 1$, alors la série diverge grossièrement; d'après le théorème d'Abel, on en conclut que :

le rayon de convergence de la série entière y est égal à 1

Q37 – Soit $a_0 = 1$ et $\mu = 1$; d'après la question **Q33** : $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1)}{4^n (2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)}{4^n (2n)!}$

Q38 – Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$

◇ *Initialisation* : $4! = 24$ et $-2^2 \times 2 \times 3 \times (-1) = 24$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

◇ *Hérédité* : Supposons que pour un certain n , $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$:

$$(4n+4)! = (4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!$$

par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &= -(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1) \times 2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) \\ &= -2^{2n+2} (2n+2)(2n+1)(2n)!(4n+3)(4n+1)(4n-1) \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) \\ &= -2^{2n+2} (2n+2)!(4n+3) \prod_{k=0}^n (4k-1)(4k+1) \end{aligned}$$

◇ *Conclusion* : On a montré par récurrence : $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$

Q39– D'après la question précédente, on déduit $\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}$

$$\text{donc } a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)4^n(2n)!} = \boxed{\frac{-(4n)!}{4^{2n}((2n)!)^2(4n-1)}}$$

Q40– D'après la formule de Stirling, $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, donc $(4n)! \sim e^{-4n} (4n)^{4n} \sqrt{8\pi n}$ et $(2n)! \sim e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}$

$$\text{Ainsi, } a_n \sim \frac{-e^{-4n} (4n)^{4n} \sqrt{8\pi n}}{4^{2n} e^{-4n} (2n)^{4n} (4\pi n) \times 4n} \sim \frac{-(4n)^{4n} 2\sqrt{2}}{2^{4n} (2n)^{4n} \times 16n\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \sim \boxed{\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}}$$

Q41– On appelle que le rayon de convergence de ϕ est $\boxed{R=1}$; donc la série est absolument convergente sur $] -1, 1[$.

Pour $|x| = 1$, $|a_n x^n| = |a_n|$; d'après la question précédente $|a_n| \sim \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; or on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente; on en conclut, par comparaison que :

$\boxed{\text{la série entière } \phi \text{ est absolument convergente aux bornes de son intervalle de convergence}}$

Q42– D'après les questions précédentes, la série entière ϕ est convergente donc définie sur $[-1, 1]$ et est non nulle; de plus son terme général vérifie la condition établie à la question **Q32**. La restriction f de ϕ à l'intervalle $]0, 1[$ est également non nulle et vérifie la même condition.

Donc $\boxed{f \text{ est une solution non nulle de } (E_1) \text{ sur }]0, 1[}$