

1 Décomposition en série de Fourier

1. Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

- $a_1 < a_2 < \dots < a_n$;
- $f|_{]-\infty, a_1[} = \varphi_0$, $f|_{]a_n, +\infty[} = \varphi_n$ et $\forall 1 \leq i \leq n-1$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[} = \varphi_i$;

où $\varphi_0 :]-\infty, a_0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_n : [a_n, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\varphi_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Toute fonction de E étant 1-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Dirichlet assure qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

2. Soit $f \in E$.

Commençons par supposer que f s'écrit $f_1 + f_2$ avec $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$. Alors pour tout réel x , nous avons $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$: il en résulte que $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et que $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Ceci prouve l'unicité de la décomposition.

Et, en définissant f_1 et f_2 comme ci-dessus, il est immédiat que ces fonctions ont la même régularité et périodicité que f , donc appartiennent à E , et que f_1 est paire, f_2 impaire. Finalement, $f_1 \in E_1$, $f_2 \in E_2$ et $f = f_1 + f_2$: l'existence de la décomposition est démontrée.

Il en résulte que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E .

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons : } a_n(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t) \cos(2\pi n t) \, dt = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lambda f(t) + \mu g(t)) \cos(2\pi n t) \, dt \\ &= 2\lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi n t) \, dt + 2\mu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \cos(2\pi n t) \, dt = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g). \end{aligned}$$

Par suite, a_n est linéaire.

On montre de même que a_0 est linéaire, ainsi que b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (b) Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons : } c_n(f) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2i\pi n t} \, dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (\cos(2\pi n t) - i \sin(2\pi n t)) \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi n t) \, dt - i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi n t) \, dt. \end{aligned}$$

D'où $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$. De même, nous obtiendrions $c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ et $c_0(f) = a_0$.

4. (a) Soit $f \in E_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Calculons } a_n(f) = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi n t) \, dt = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) \cos(2\pi n t) \, dt + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi n t) \, dt.$$

Comme $t \mapsto f(t) \cos(2\pi n t)$ est paire, un changement de variable $u = -t$ donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) \cos(2\pi n t) \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(u) \cos(2\pi n u) \, du, \text{ d'où } a_n(f) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi n t) \, dt.$$

Par contre, le même calcul montre que $a_0(f) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \, dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi \cdot 0 t) \, dt$.

- (b) Soit $f \in E_2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul similaire à 4a, utilisant le fait que cette fois, $t \mapsto f(t) \sin(2\pi n t)$ est paire, montre que $b_n(f) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi n t) \, dt$.

5. (a)

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons d'abord que f_3 est paire, donc $b_n(f_3) = 0$ (ceci résulte d'un calcul du type 4a, en utilisant que $t \mapsto f_3(t) \sin(2\pi n t)$ est impaire). Pour $a_n(f_3)$, calculons :

$$\begin{aligned} a_n(f_3) &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f_3(t) \cos(2\pi n t) \, dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) \cos(2\pi n t) \, dt \\ &= 4 \left[\frac{1-t^2}{2\pi n} \sin(2\pi n t) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{2\pi n} \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(2\pi n t) \, dt \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(\frac{3}{4} \sin(n\pi) - \sin(0) \right) + \frac{4}{\pi n} \left[-\frac{t}{2\pi n} \cos(2\pi n t) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{(\pi n)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi n t) \, dt \\ &= -\frac{2}{(\pi n)^2} \left(\frac{1}{2} \cos(\pi n) - 0 \cos(0) \right) + \frac{2}{(\pi n)^2} \left[\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Et } a_0 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) \, dt = 2 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{11}{12}.$$

- (c) $f_3 \in E$ (f_3 est continue car $\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f_3(t) = \frac{3}{4} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} f_3(t)$), donc d'après 1, f_3 est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier.

Par ailleurs, $c_n(f_3) = c_{-n}(f_3) = \frac{a_n(f_3)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f_3) e^{2i\pi n t} = a_0(f_3) + \sum_{n=1}^N a_n(f_3) \cos(2\pi n t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}^*.$$

D'où, en $\frac{1}{2}$, l'égalité de f_3 et de la somme de sa série de Fourier écrite à l'aide des $a_n(f_3)$ donne :

$$\frac{3}{4} = f_3\left(\frac{1}{2}\right) = a_0(f_3) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_3) \cos(2\pi n \frac{1}{2}),$$

soit

$$\frac{3}{4} - \frac{11}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2 \pi^2},$$

d'où finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part, f_3 étant 1-périodique et localement intégrable, le théorème de Bessel-Parseval s'applique et donne :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t))^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n(f_3))^2 = (a_0(f_3))^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f_3))^2.$$

$$\text{Or } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t))^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 2t^2 + t^4) dt$$

$$= [t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{32 \times 5}) = \frac{16 \times 3 \times 5 - 40 + 3}{16 \times 3 \times 5} = \frac{207}{240}, \text{ d'où}$$

$$\frac{121}{144} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 \pi^4} = \frac{207}{240},$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{207}{240} - \frac{121}{144} \right) = \frac{\pi^4}{2} \times \frac{207 \times 3 - 121 \times 5}{720} = \frac{16\pi^4}{2 \times 720} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2 Approximation d'une fonction continue

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que g et g_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

De plus, $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $g'(t) = -2\pi \sin(2\pi t)$ et $g_n'(t) = -2\pi n D_n \sin(2\pi t)(1 + \cos(2\pi t))^{n-1}$.

D'où les tableaux de variations suivants :

t	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	t	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g'(t)$		+	-	$g_n'(t)$		+	-
g			2	g_n		$2^n D_n$	
	0	$\nearrow$	$\searrow$		0	$\nearrow$	$\searrow$
			0				0

- (b) Commençons par établir la relation de récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi t))^{2n} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi t))^{2n-1} \cos(\pi t) dt \\ &= \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi} (\cos(\pi t))^{2n-1} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + (2n-1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\sin(\pi t))^2 (\cos(\pi t))^{2n-2} dt \\ &= (2n-1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - (\cos(\pi t))^2) (\cos(\pi t))^{2n-2} dt \\ &= (2n-1)(J_{n-1} - J_n) \end{aligned}$$

D'où $J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1}$.

Comme $J_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1$, une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme pour tout réel t , $1 + \cos(2\pi t) = 2(\cos(\pi t))^2$, nous avons $(1 + \cos(2\pi t))^n = 2^n(\cos(\pi t))^{2n}$.

Par suite, $I_n = 2^n J_n$, soit $I_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

(d) Nous en déduisons bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \frac{1}{I_n} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times e^{-1},$$

d'où $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (n + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(e^{-1}) = (n + \frac{1}{2}) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.

Par suite, en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'origine,

$$v_n = (n + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) \right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Il en résulte que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, donc pour n assez grand, $|v_n| \leq 2 \times \frac{1}{12n^2}$, soit $v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ceci prouve que la série $(\sum v_n)$ converge absolument : posons $A = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \in \mathbb{R}$.

(b) Pour tout naturel k , $v_k = \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$, d'où $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n)$.

Par suite, $u_n = e^{\sum_{k=0}^{n-1} v_k}$, et comme $\exp$ est continue en A , par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^A$.

Posons $B = e^{-A} > 0$: $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{B}$, d'où

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

(c) Il résulte de ce qui précède que :

$$D_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n(B n^n e^{-n} \sqrt{n})^2}{B(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}} = \frac{B\sqrt{n}}{2^n \sqrt{2}},$$

d'où

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B\sqrt{n}}{2^n \sqrt{2}} \quad \text{et par suite} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0.$$

(d)

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. f est continue en 0, donc $\exists \eta_1 > 0$ tel que :

$$|x - 0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Alors $\eta = \min(\eta_1, \frac{1}{4})$ satisfait aux exigences de la question.

(b)

$$g_n(\eta) = D_n (1 + \cos(2\pi\eta))^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B\sqrt{n}}{2^n \sqrt{2}} \times ((1 + \cos(2\pi\eta))^n = \left(\frac{(1 + \cos(2\pi\eta))}{2} \right)^n \times \frac{B\sqrt{n}}{\sqrt{2}},$$

donc $g_n(\eta) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha k^n \sqrt{n}$ où $0 < k < 1$, et donc (comparaison des fonctions usuelles),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(\eta) = 0.$$

- (c) f n'est pas l'application nulle, donc $M = 2 \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(t)| > 0$.

Par suite $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$, et $g_n(\eta) \leq 0$, donc d'après 3b, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow 0 \leq g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.
Or, d'après l'étude des variations de g_n , pour tout $n \geq n_1$, nous avons :

- g_n est décroissante sur $]\eta, \frac{1}{2}[$, donc $\forall t \in]\eta, \frac{1}{2}[$, $g_n(t) \leq g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$;
- g_n est croissante sur $]-\frac{1}{2}, -\eta[$, donc $\forall t \in]-\frac{1}{2}, -\eta[$, $g_n(t) \leq g_n(-\eta) = g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

Finalement, nous avons montré que pour tout entier $n \geq n_1$,

$$\forall t \in]-\frac{1}{2}, -\eta[\cup]\eta, \frac{1}{2}[, \quad 0 \leq g_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

- (d) Soit $n \geq n_1$ et $t \in]-\frac{1}{2}, -\eta[\cup]\eta, \frac{1}{2}[$.

$$|f(t) - f(0)|g_n(t) \leq (|f(t)| + |f(0)|)g_n(t) \leq 2 \times \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(t)| \times g_n(t) \leq 2 \times \frac{M}{2} \times \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} |K_n| &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t) - f(0))g_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{-\eta} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) dt + \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) dt, \end{aligned}$$

d'où, si $n \geq n_1$,

$$|K_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \eta\right) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\eta}^{\eta} g_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \eta\right) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} (2 - 2\eta) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, nous avons démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0.$$

4. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n , nous avons (avec un changement de variable $x = t - u$ dans la première intégrale) :

$$f_n(u) - f_n(0) = \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} f(t)g_n(t-u) dt - f_n(u) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx = \int -\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} (f(x+u) - f(u))g_n(x) dx = K_n(h),$$

où $h : x \mapsto h(x) = f(x+u)$ est une application périodique de période 1, continue et non nulle.

L'étude faite à la question 2 s'applique et montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(h) = 0$, soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(u) - f(u)) = 0.$$

- (b) Soit $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculons :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= D_n(1 + \cos(2\pi t))^n = D_n(2\cos^2(\pi t))^n = 2^n D_n\left(\frac{e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}}{2}\right)^{2n} \\ &= 2^{-n} D_n \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k e^{il\pi t} e^{-i(2n-l)\pi t} = 2^{-n} D_n \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i2(l-n)\pi t} \\ &= \sum_{k=-n}^n 2^{-n} D_n C_{2n}^{n+k} e^{2i\pi kt} = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{2i\pi kt}, \end{aligned}$$

où $\alpha_k = 2^{-n} D_n C_{2n}^{n+k}$ pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$.

- (c) D'après ce qui précède, pour tout réel u ,

$$f(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u).$$

Et f_n est pour tout entier n , une somme finie de fonctions trigonométriques. En effet :

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} (f(t)g_n(t-u)) dt = \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} [f(t) \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{2i\pi k(t-u)}] dt \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} \alpha_k f(t) e^{2i\pi kt} dt \right) e^{-2i\pi ku} \\ &= \sum_{k=-n}^n \beta_k e_k(u) \end{aligned}$$

3 Théorème d'échantillonnage

1. (a) Soit $h \in H$.

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|h(t)e^{-2i\pi t\tau}| \leq |h(t)|$, donc l'intégrale $\hat{h}(\tau)$ est absolument convergente, donc définie.

De même, $\check{h}(\tau)$ est définie pour tout réel τ .

- (b) Soit $h \in H$.

Pour $\tau \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\overline{\hat{h}(\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{2i\pi t\tau}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2i\pi t\tau} dt = \check{h}(\tau),$$

d'où $\overline{\hat{h}} = \check{h}$.

Et par hypothèse, pour tout réel t ,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\tau)e^{-2i\pi t\tau} d\tau = \check{\check{h}}(t),$$

d'où $\check{\check{h}} = h$.

2. Pour tout réel τ , nous avons :

$$|\hat{h}(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{2i\pi t\tau} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{2i\pi t\tau}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = M,$$

Et M étant une constante réelle indépendante de τ , ceci montre que $\hat{h}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

De même, $\check{h}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

L'énoncé nous dit de supposer que les applications $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$! Elles sont donc en particulier continues sur $\mathbb{R}$. (La démonstration de cette continuité peut être faite directement en appliquant le théorème de convergence dominée.)

3. Soit $f \in F$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n(\tilde{g}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(t)e^{-2i\pi nt} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(t)e^{-2i\pi nt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{-2i\pi nt} dt = f(n),$$

car $f \in F$, donc $\hat{f}(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{2}$.

- (b) Par hypothèse, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\hat{f}(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{2}$, nécessairement,

$\hat{f}(-\frac{1}{2}) = 0 = \hat{f}(\frac{1}{2})$, et donc $\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\tilde{g}$ est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\tilde{g})e^{2i\pi nt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi nt}.$$

Il vient que pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)e^{-2i\pi t\tau} d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau)e^{-2i\pi t\tau} d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(\tau)e^{-2i\pi t\tau} d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau} \right) e^{-2i\pi t\tau} d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau} e^{-2i\pi t\tau} \right\} d\tau \end{aligned}$$

- (c) Nous admettons que l'on a le droit d'intervertir l'intégrale et la somme d'où, pour tout réel $t \notin \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau} e^{-2i\pi t\tau} \right\} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n)e^{2i\pi n\tau} e^{-2i\pi t\tau} d\tau \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi(n-t)\tau} d\tau \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) \left[\frac{e^{2i\pi(n-t)\tau}}{2i\pi(n-t)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) \left[\frac{e^{i\pi(n-t)} - e^{-i\pi(n-t)}}{2i\pi(n-t)} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(n-t))}{\pi(n-t)} \end{aligned}$$