

Exercice 1

1) $\forall x > 0, f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x}$

Comme $n \geq 3$, sur l'intervalle $]0, 2[$ la fonction f_n est strictement décroissante et continue, $\lim_{0^+} f_n = +\infty$. La restriction de f_n à $]0, 2[$ est une bijection de $]0, 2[$ sur $]2 - n \ln(2), +\infty[$
 $n \geq 3$ donc $2 - n \ln(2) \leq 2 - 3 \ln(2) < 0$, donc $0 \in]2 - n \ln(2), +\infty[$
 f_n s'annule donc une fois et une seule sur $]0, 2[$ en a_n

Comme $f_n(1) = 1 > 0$, $a_n \in]1, 2[$ pour tout $n \geq 3$

2) Pour $n \geq 4, x \geq 0, f_n(x) - f_{n-1}(x) = -\ln(x)$

donc $f_n(a_{n-1}) - f_{n-1}(a_{n-1}) = -\ln(a_{n-1}), f_{n-1}(a_{n-1}) = f_n(a_n) = 0$

donc $f_n(a_{n-1}) - f_n(a_n) = -\ln(a_{n-1}) < 0$ puisque $a_{n-1} \in]1, 2[$

f_n étant strictement décroissante sur $]1, 2[$, la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante

3) La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers $l \geq 1$

si $l > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(a_n) = +\infty$ comme $a_n = n \ln(a_n)$ on a une impossibilité

donc la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ converge vers 1

4) La fonction $\Phi : t \rightarrow \frac{\ln(1+t)}{1+t}$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ intervalle ouvert contenant 0, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre k en 0

5) La partie régulière du développement limité d'ordre k en 0 est la somme partielle de rang k du développement en série entière de Φ en 0

Φ est le produit de deux fonctions développables en série entière en 0

$$\forall t, |t| < 1, \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} t^i, \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^i t^i$$

$$\text{donc } \forall t, |t| < 1, \Phi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j t^j \text{ avec } b_j = \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-1)^{j-k} = (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}$$

en particulier $\Phi'(0) = 1, \Phi''(0) = -2(1 + \frac{1}{2}) = -3$

donc $|b_j| = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}$, la série de terme général $\frac{1}{k}$ est à termes positifs et elle diverge donc $\lim_{j \rightarrow +\infty} |b_j| = +\infty$

6) $\forall t \in] -1, +\infty[, \Phi'(t) = \frac{1 - \ln(1+t)}{(1+t)^2}$ donc $\forall t \in] -1, e-1[, \Phi'(t) > 0$

$\lim_{-1} \Phi = -\infty, \Phi(e-1) = \frac{1}{e}$

La restriction de Φ à $] -1, e-1[$ est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $] -1, e-1[$ sur $] -\infty, \frac{1}{e}[$, elle admet donc une application réciproque Ψ définie et continue sur $] -\infty, \frac{1}{e}[$ strictement croissante

t		-1	0	$+\infty$
Ψ		$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow e-1$

7) La restriction de Φ à $] -1, e-1[$ est de classe C^∞ sur $] -1, e-1[$, Φ' ne s'annule pas sur $] -1, e-1[$ donc Φ est un C^∞ -difféomorphisme de $] -1, e-1[$ sur $] -\infty, \frac{1}{e}[$ donc Ψ est de classe C^∞ sur $] -\infty, \frac{1}{e}[$ intervalle ouvert contenant 0 donc

Ψ admet un développement limité à tout ordre k en 0, $\Psi(0) = 0$

donc $\Psi(u) = \sum_{j=1}^k c_j u^j + o(u^k)$

8) Posons $b_n = a_n - 1$, comme $1 < a_n < 2, b_n \in] -1, e-1[$

De plus $\frac{\ln(1+b_n)}{1+b_n} = \Phi(b_n) = \frac{1}{n}$ donc $b_n = \Psi\left(\frac{1}{n}\right)$

$c_1 = \Psi'(0) = \frac{1}{\Phi'(0)} = 1, c_2 = \frac{1}{2} \Psi''(0) = -\frac{1}{2} \frac{\Phi''(0)\Phi'(0)}{(\Phi'(0))^2} = \frac{3}{2}$

donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$9) \forall u \in]-\infty, \frac{1}{e}[, \Phi(\Psi(u)) = u = \frac{\ln(1 + \Psi(u))}{1 + \Psi(u)}$$

donc en dérivant $(1 + \Psi(u))(1 + \Psi(u) + u\Psi'(u)) = \Psi'(u)$

Ψ, Ψ' sont de classe C^∞ au voisinage de 0, elles admettent des développements limités à tout ordre en 0

$$\Psi(u) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j u^j + o(u^k) ; \Psi'(u) = \sum_{j=1}^k j c_j u^{j-1} + o(u^k)$$

Le développement limité d'ordre k d'un produit s'obtient en tronquant le produit des parties régulières d'ordre k de chaque terme

$$1 + \Psi(u) + u\Psi'(u) = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (1+j)c_j u^j + o(u^{k-1})$$

le coefficient de u^{k-1} du développement limité de $(1 + \Psi(u))(1 + \Psi(u) + u\Psi'(u))$ est :

$$k c_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} c_j (k-j) c_{k-1-j} + c_{k-1} \text{ si } k \geq 3, 3c_1 \text{ si } k = 2$$

le développement limité étant unique, on obtient :

$$c_1 = 1 ; c_2 = \frac{3}{2} c_1 \text{ et si } k \geq 3, k c_k = k c_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} c_j (k-j) c_{k-1-j} + c_{k-1}$$

Montrons par récurrence que tous les c_j sont strictement positifs pour $j \geq 1$

- $c_1 = 1$

- supposons que pour $0 < j < n$, $c_j > 0$ la relation précédente permet alors d'affirmer que $c_n > 0$

Exercice 2

f est C^∞ sur I

$$1) a) f^{(0)}(x) = \frac{1}{(\cos x)^{0+1}} = \frac{P_0(\sin x)}{(\cos x)^{0+1}} \text{ avec } P_0 = 1$$

Supposons que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ avec P_n polynôme. En dérivant on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\cos x)^2 P'_n(\sin x) + (n+1) \sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{(1 - \sin^2 x) P'_n(\sin x) + (n+1) \sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

avec $P_{n+1} = (1 - X^2) P'_n + (n+1) X P_n$

P_{n+1} est un polynôme comme produit et somme de polynômes. D'où l'existence de P_n

Supposons que $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$

on a alors $\forall x \in I, P_n(\sin x) = Q_n(\sin x)$ soit $\forall x \in]-1, 1[, (P_n - Q_n)(x) = 0$

$P_n - Q_n$ est un polynôme qui a une infinité de racines, donc $P_n - Q_n = 0$

donc il existe un polynôme P_n et un seul tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$

$$b) P_{n+1} = (1 - X^2) P'_n + (n+1) X P_n$$

$$c) P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = 1 + X^2$$

d) On montre par récurrence que le monôme de plus haut degré de P_n est : X^n

e) $f^{(n)}$ a la parité de n , la fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire donc $\forall x \in I, P_n(-\sin x) = (-1)^n P_n(\sin x)$ soit $\forall x \in]-1, 1[, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

donc le polynôme $P_n(-X) - (-1)^n P_n(X)$ est nul P_n a la parité de n

(on peut aussi montrer la propriété par récurrence)

2) a) $P_0 = 1$ donc les coefficients de P_0 sont des entiers positifs

Supposons que les coefficients de P_n soient entiers positifs, P_n a la parité de n donc posons

$$P_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k} X^{n-2k}$$

$$P_{n+1} = (1 - X^2) P'_n + (n+1) X P_n = P'_n + [(n+1) X P_n - X^2 P'_n]$$

$$\text{soit } P_{n+1} = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k} (n-2k) X^{n-2k-1} + \sum_{k=0}^{[n/2]} (2k+1) a_{n-2k} X^{n-2k+1}$$

P_{n+1} est donc la somme de deux polynômes à coefficients entiers positifs, c'est donc un polynôme à coefficients entiers positifs $\boxed{\text{les coefficients de } P_n \text{ sont des entiers positifs}}$

b) $P_0(1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$ donc $P_n(1) = n!$

3) f est de classe C^∞ sur I , appliquons la formule de Taylor avec reste intégral

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Pour $x \neq 0$ faisons dans l'intégrale le changement de variable affine $u = \frac{1}{x}(x-t)$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_1^0 \frac{u^n x^n}{n!} (-x) f^{(n+1)}(x(1-u)) du = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du$$

si $x = 0$ l'égalité est encore vraie donc

$$\forall x \in I, f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du$$

4) $a_n = \frac{P_n(0)}{n!} \geq 0$ puisque les coefficients de P_n sont positifs

si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, la série $\sum a_n x^n$ a pour somme partielle $S_n(x)$, elle est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée

or P_{n+1} étant à coefficients positifs, $f^{(n+1)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc si $x \geq 0$, $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$

On en déduit que si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $S_n(x) \leq f(x)$ donc la série $\sum a_n x^n$ converge

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$

5) a) toutes les dérivées de f étant positives sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, elles sont croissantes sur cet intervalle

si $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, $\forall u \in [0, 1]$, $0 \leq x(1-u) \leq y(1-u) < \frac{\pi}{2}$

donc $0 \leq f^{(n+1)}(x(1-u)) \leq f^{(n+1)}(y(1-u))$

soit en intégrant entre 0 et 1, $0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(y(1-u)) du = \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$

donc $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$

b) si $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $S_n(y) \geq 0$ donc $R_n(y) \leq f(y)$ donc $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

6) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, il existe y tel que $x < y < \frac{\pi}{2}$, d'après 5) $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

Comme $0 \leq \left(\frac{x}{y}\right) < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - S_n(x)) = 0$

donc si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$ (puisque f est paire, $f^{(2k+1)}(0) = 0$)

si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $f(-x) = f(x)$ donc pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$

7) a) $1 \in I$, donc la série $\sum a_{2k}$ converge donc la suite (a_{2k}) converge vers 0

b) Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \frac{\pi}{2}$, la série entière $\sum a_{2k} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{2k}$ converge, donc la suite positive $(a_{2k} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{2k})$ converge vers 0, elle est donc bornée

c) $\sqrt{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc la série $\sum a_{2k} (\sqrt{2})^{2k}$ converge donc la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée

d) La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$ est une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 donc sa somme S est encadrée par deux sommes partielles consécutives, en particulier

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} \leq S \leq 1$$

Si $k = 0$, $a_0 = 1$ donc l'inégalité est vérifiée

Si $k \geq 1$, $1 - \frac{1}{27} \leq 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} \leq S \leq 1$

$$3^k a_{2k} = \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^k \times \frac{4}{\pi} S \geq \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^k \times \frac{26 \times 4}{27 \times \pi} \geq 1 \text{ car } \left(\frac{26 \times 4}{27 \times \pi} \simeq 1.2261 > 1, \frac{12}{\pi^2} > 1\right)$$

$$2^k a_{2k} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^k \times \frac{4}{\pi} S = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{k+2/3} \frac{1}{\pi^{1/3}} S \leq 1 \text{ car } \left(\frac{8}{\pi^2} < 1 \text{ et } \frac{1}{\pi^{1/3}} S \leq \frac{1}{\pi^{1/3}} \leq 1\right)$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \frac{1}{3^k} \leq a_{2k} \leq \frac{1}{2^k}}$

Exercice 3

- 1) a) Comme $2n-1 \geq 1$, $1 = (1-X+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k}$
- soit $1 = (1-X)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k} \right) + X^n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} \right)$
- posons $\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k}}$ et $\boxed{g_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{n+k} X^k (1-X)^{n-1-k}}$
- f_n et g_n sont des polynômes de $R_{n-1}[X]$ tels que $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$
- b) $\boxed{f_1(X) = 1, f_2(X) = 2X + 1, f_3(X) = 6X^2 + 3X + 1}$
- 2) Si $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$ alors $(1-X)^n (A(X) - f_n(X)) = X^n (g_n(X) - B(X))$
 0 est racine d'ordre au moins n de $(1-X)^n (A(X) - f_n(X))$ donc de $(A(X) - f_n(X))$
il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $X^n (g_n(X) - (1-X)^n Q - B(X)) = 0$
Comme X^n n'est pas le polynôme nul alors $B(X) = g_n(X) + (1-X)^n Q$
réciproquement si $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q$ alors $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$
- Donc $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} (1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1 \\ A, B \in R[X] \end{array} \right\} \iff \exists Q \in R[X], \left\{ \begin{array}{l} A(X) = f_n(X) + X^n Q \\ B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q \end{array} \right\}}$
- si A est de degré inférieur ou égal à $n-1$, nécessairement $Q = 0$ donc il ya unicité de f_n et g_n
- 3) a) Si $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$ alors $(X^n)^n f_n(1-X) + (1-X)^n g_n(1-X) = 1$
 $f_n(1-X)$ et $g_n(1-X)$ sont des polynômes de $R_{n-1}[X]$ qui vérifient $(1-X)^n g_n(1-X) + X^n f_n(1-X) = 1$
d'après l'unicité de f_n et g_n $\boxed{f_n(1-X) = g_n(X) \text{ et } g_n(1-X) = f_n(X)}$
- b) $\forall x \in R, (1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = 0$ on obtient $\boxed{f_n(0) = 1}$
- $\forall x \in R, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$ donc pour $x = 1$ on obtient $\boxed{f_n(1) = C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^n}$
- $\forall x \in R, f_n(1-x) = g_n(x)$ et $(1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient $\boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = g_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}}$
- 4) a) Si $x \neq 1$ donc si $x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} + x^{n-1} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n}$
- comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n} = 0$, $\boxed{f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})}$
- b) f_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $f_n(x)$ est la partie régulière du développement limité d'ordre $(n-1)$ de $(1-x)^{-n}$
- or $(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-n) \dots (-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n+k-1}^k x^k + o(x^{n-1})$
- donc $\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} X^k}$
- c) Les coefficients de f_n sont tous positifs, le coefficient constant est 1, donc $\forall x \in R^+, f_n(x) \geq 1$
- $\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ n'a pas de racine positive ou nulle}}$
- 5) a) en dérivant la relation $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$, on obtient :
 $(1-X)^{n-1} (n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)) = X^{n-1} (n g_n(X) + X g_n'(X))$
 $n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$ qui admet 0 comme racine d'ordre au moins $(n-1)$ donc il existe un réel k tel que $n f_n(X) - (1-X) f_n'(X) = k X^{n-1}$, $f_n(1) = C_{2n-1}^n$ donc $k = n C_{2n-1}^n$
donc $\boxed{\forall x \in R, n f_n(x) - (1-x) f_n'(x) = n C_{2n-1}^n x^{n-1}}$

b) Supposons que l'équation $f_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles strictement négatives, notons a et b deux racines consécutives de f_n , ($a < b < 0$)

$$f'_n(a) = \frac{-nC_{2n-1}^n a^{n-1}}{1-a} \text{ donc } f'_n(a) \text{ est non nulle et du signe de } (-1)^n \text{ de même pour } f'_n(b)$$

f_n garde un signe constant sur $]a, b[$, $f_n(a) = f_n(b) = 0$, $f'_n(a)$ et $f'_n(b)$ sont de même signe, on a une impossibilité

6) h_n est de classe C^1 sur R et $\forall x \in R$, $h'_n(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

h_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ donc

si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_n = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$, si n est impair, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_n = -\infty$ donc

$\begin{array}{c ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline h'_{2n+1} & & + & \\ \hline h_{2n+1} & -\infty & \nearrow 0 & \nearrow +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline h'_{2n} & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline h_{2n} & +\infty & \searrow 0 & \nearrow h_n(1) & \searrow -\infty \end{array}$
---	---

Posons $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ avec p et q entiers naturels

$$I(p, q) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (1-t)^q \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \text{ si } q \geq 1$$

$$\text{donc } I(p, q) = \frac{q!p!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \frac{q!p!}{(p+q+1)!} \quad \boxed{h_n(1) = I(n-1, n-1) = \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{1}{nC_{2n-1}^n}}$$

7) a) Sur $] -\infty, 1[$, f_n est la solution vérifiant $f_n(0) = 1$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1-x)y' - ny = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}$$

L'équation sans second membre a pour solution toutes les fonctions : $x \rightarrow \frac{\lambda}{(x-1)^n}$ avec $\lambda \in R$

Employons la méthode de variation de la constante

$x \rightarrow \frac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de (E) sur $] -\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda'(x) = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

donc si et seulement si $\lambda(x) = -nC_{2n-1}^n h_n(x) + cte$ sur $] -1, +\infty[$

donc il existe $k \in R$ tel que pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{k - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}$

$f_n(0) = 1$ donc $k = 1$ donc pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$

deux fonctions polynômes égales sur $] -\infty, 1[$ sont égales sur R

donc $\forall x \in R$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$ donc $\boxed{\forall x \neq 1, f_n(x) = \frac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}}$

b) f_n est continue en 1 donc $f_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-nC_{2n-1}^n \frac{h_n(x) - h_n(1)}{(1-x)^n} \right)$

$h'_n(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ donc $h_n^{(k)}(1) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$ et en utilisant la formule de Leibniz

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(n-1)!(n-1)!}{(n-1-k)!(k)!} x^{n-1-k} (-1)^{n-1-k} (1-x)^k \text{ donc } h_n^{(n)}(1) = (n-1)!(-1)^{n-1}$$

$$(h_n(x) - h_n(1)) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x-1)^n}{n!} h_n^{(n)}(1) = -\frac{(1-x)^n}{n} \text{ on retrouve donc que } f_n(1) = C_{2n-1}^n$$

8) $x \in] -\infty, 0[$ est solution de $f_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \frac{1}{nC_{2n-1}^n} > 0$

En utilisant les variations de h_n vues au 6) on en déduit que :

Si n est impair $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $] -\infty, 0[$ donc pas de solution sur R

Si n est pair $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule sur $] -\infty, 0[$ donc une solution et une seule sur R

9) $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} z^k$ d'après 4). Si $|z| \geq 1$, $f_n(z) = C_{2n-1}^{n-1} z^{n-1} \left(1 + \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1} \frac{1}{z^{k-n+1}} \right)$

$$\text{soit } B = \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1} \frac{1}{z^{k-n+1}}, |B| \leq \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} (C_{n+k}^n - C_{n+k-1}^n) = \frac{C_{2n-2}^n}{C_{2n-1}^{n-1}}$$

$$\frac{C_{2n-2}^n}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{n-1}{(2n-1)} < 1 \text{ donc } 1+B \text{ ne s'annule pas et si } |z| \geq 1, f_n(z) \neq 0$$

donc toutes les racines complexes de $f_n(z) = 0$ sont de modules strictement inférieurs à 1