

\mathcal{E} désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

Notations

Par "projection" ou "symétrie" on entend projection orthogonale ou symétrie orthogonale. La distance de deux droites D_1, D_2 quelconques est notée $d(D_1, D_2)$. On a donc

$$d(D_1, D_2) = \inf \{ \| \overline{M_1 M_2} \| / M_1 \in D_1 \text{ et } M_2 \in D_2 \}.$$

$\mathcal{C}(\Delta)$ désigne le cylindre de révolution d'axe la droite Δ et de rayon 1.

On rapporte \mathcal{E} à un repère orthonormal direct $R, R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans tout le problème on note D la droite $(O; \vec{k})$.

Un ensemble de droites de \mathcal{E} est dit régulier si pour tout couple de droites distinctes D_1, D_2 de cet ensemble on a $d(D_1, D_2) = 1$.

Dans ce problème on étudie quelques ensembles réguliers de droites de \mathcal{E} . Les figures et les démonstrations géométriques seront utiles et appréciées.

Préliminaires.

On considère deux droites $D_1 = (A_1; \vec{u}_1)$ et $D_2 = (A_2; \vec{u}_2)$ non parallèles.

a) Montrer qu'il existe un couple unique λ_1, λ_2 de deux nombres réels tels que, si l'on pose

$$\overline{H_1 A_1} = \lambda_1 \vec{u}_1, \quad \overline{H_2 A_2} = \lambda_2 \vec{u}_2$$

le vecteur $\overline{H_1 H_2}$ soit orthogonal à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

b) En déduire qu'il existe une droite et une seule rencontrant D_1 et D_2 et dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

c) Montrer que, pour tout couple (M_1, M_2) de points appartenant respectivement à D_1 et D_2 , la distance $M_1 M_2$ est supérieure ou égale à la distance $H_1 H_2$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

d) Soit \vec{n} un vecteur non nul orthogonal à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Montrer que le pro-

duit scalaire $M_1 M_2 \cdot \vec{n}$ est constant quand M_1 et M_2 décrivent respectivement D_1 et D_2 .

En déduire la relation :

$$d(D_1, D_2) = \frac{|[A_1 A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2]|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}$$

où $[A_1 A_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ désigne le produit mixte des vecteurs $\overline{A_1 A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ pris dans cet ordre.

Partie I -

I.A -

I.A.1)

a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}(D)$. Quelle est la normale à $\mathcal{C}(D)$ en un point de $\mathcal{C}(D)$? (On la caractérisera géométriquement).

b) Quel est l'ensemble des droites D' telles que $d(D, D') = 1$? Comment se projettent-elles sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

I.A.2) Soit α un réel fixé dans $]0, \pi/2[$ et P le plan d'équation $z - x \tan \alpha = 0$. Montrer que E , intersection de P et $\mathcal{C}(D)$, est une ellipse. En donner une équation réduite dans son plan.

I.A.3) Quelle est l'enveloppe des droites D' contenues dans un plan donné, non parallèle à D , et vérifiant $d(D, D') = 1$?

I.B -

I.B.1) Soit D' une génératrice de $\mathcal{C}(D)$. Décrire les ensembles réguliers de droites contenant D et D' et formés de :

- trois droites
- quatre droites.

c) Peut-on obtenir un tel ensemble contenant cinq droites ?

I.B.2) Déterminer les ensembles réguliers de droites parallèles à un même plan.

Partie II -

Soit la droite D' définie par les équations $x - 1 = 0$ et $z - y \tan \beta = 0$, β désignant un réel fixé dans $[0, \pi/2[$.

II.1) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}(D')$ est :

$$(x - 1)^2 + (y \sin \beta - z \cos \beta)^2 - 1 = 0.$$

Faire une figure représentant la projection sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de D', de $\mathcal{E}(D)$ et des génératrices de $\mathcal{E}(D')$ le long desquelles le plan tangent à $\mathcal{E}(D')$ est parallèle à D.

II.2) Soit Γ l'intersection de $\mathcal{E}(D)$ et de $\mathcal{E}(D')$

- a) Déterminer géométriquement trois axes de symétrie de Γ .
- b) Quelle est la projection de Γ sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$?
- c) Montrer que Γ est formée de l'arc paramétré Γ_1 défini par :

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= (\sin t) \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\cos t (2 - \cos t)} \end{aligned}$$

t variant dans $[-\pi/2, \pi/2]$ et de son symétrique Γ_2 par rapport à la droite $(O; \vec{i})$.

- d) Montrer que Γ admet deux tangentes V et V' parallèles à D. Préciser leurs points de contact.
- e) Soit M un point de Γ , projeté en H sur D et en H' sur D'. Montrer que la tangente à Γ en M est perpendiculaire au plan $(M; \overline{MH}, \overline{MH'})$.

II.3) On se propose de construire la projection γ de Γ sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

- a) On pose $Y = y$ et $Z = z - y \tan \beta$. Déterminer les vecteurs (\vec{J}, \vec{K}) tels que Y et Z soient les coordonnées dans le repère $(O; \vec{J}, \vec{K})$ du point de coordonnées (y, z) dans le repère $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

b) Tracer γ .

II.4) On considère les droites, notées D'', telles que l'ensemble $\{D, D', D''\}$ soit régulier, les trois droites D, D', D'' n'étant pas parallèles à un même plan.

- a) Quelle condition nécessaire doit vérifier la projection d'' d'une telle droite D'' sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$?
- b) d'' vérifiant cette condition montrer qu'il lui correspond, sauf cas particuliers à préciser, une famille de droites D'', tangentes à une ellipse.
- c) Pour une telle droite montrer que 1 est strictement compris entre $d(V, D'')$ et $d(V', D'')$.
- d) Soit D'''(t) la tangente à Γ_1 au point de paramètre t. Pour D'' donné tel que, pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, D'' et D'''(t) ne soient pas parallèles on admet que l'application $t \rightarrow d(D'', D'''(t))$ est continue.

Montrer qu'étant données trois droites, non parallèles à un même plan et formant un ensemble régulier, il existe au moins un ensemble régulier de quatre droites les contenant.

Partie III - pour H seulement

Dans cette partie on montre l'existence d'ensembles réguliers formés de six droites.

III.1) Soit la droite $D'_1 = (A; \vec{u})$ où A est le point de coordonnées $(r, 0, 0)$, $r > 0$ et \vec{u} le vecteur de composantes $(0, 2t, 1)$.

- a) Déterminer D'_2 déduite de D'_1 par la rotation d'axe $(O; \vec{k})$ et d'angle $2\pi/3$. Établir une relation entre t et r pour que l'on ait : $d(D'_1, D'_2) = 1$.
- b) En déduire un ensemble régulier de quatre droites, invariant dans une rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe $(O; \vec{k})$.

III.2) Soient le point B de coordonnées $(q, 0, 0)$ et le vecteur \vec{v} de composantes $(0, 2s, 1)$. À la droite $\Delta_0 = (B; \vec{v})$ on fait subir un vissage composé de la rotation d'axe $(O; \vec{k})$ et d'angle θ , et de la translation de vecteur $p\vec{k}$. On obtient une droite Δ_1 .

- a) Déterminer Δ_1 .

b) Montrer que la condition $d(D_1, \Delta_1) = 1$ peut se mettre sous la forme :

$$a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c \cos \theta + d \sin \theta + e = 0 \quad (1)$$

où a, b, c, d, e sont des fonctions de p, q, r, s, t . On ne demande pas leur calcul explicite.

III.3) Montrer que si a, b, c, d, e vérifient les relations :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + d^2 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

alors il existe un réel θ tel que $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta - \frac{2\pi}{3}$ soient racines de (1) considérée comme équation en θ .

III.4) On prend pour t et s les valeurs suivantes :

$$(2) \quad t = \sqrt{3r^2 - 1} \quad \text{et} \quad s = -\sqrt{3q^2 - 1}$$

On pose :

$$X = rt + sq \quad \text{et} \quad Y = tq + rs$$

Le calcul, non demandé, donne les égalités suivantes pour (1) :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} [4s^2 t^2 (p^2 - 1) - Y^2] & b &= -2pstY \\ c &= 2(XY - ts) & d &= 4pstX \end{aligned}$$

De même on admet que la relation $e = 0$ équivaut à :

$$(3) \quad p^2 = 1 + \frac{1}{2s^2 t^2} (t^2 + s^2 - \frac{1}{2} Y^2 - X^2)$$

Les relations (2) et (3) étant supposées vérifiées, montrer que

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = g(r, q) \quad \text{où } g \text{ est une fonction continue sur}$$

$]1/\sqrt{3}, +\infty[\times]1/\sqrt{3}, +\infty[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(r, q)$.

a) Calculer

- $g(r, q)$ pour $r = 1$ et $q = 2,52$
- $g(r, q)$ pour $r = 1$ et $q = 2,53$

b) En déduire l'existence d'un ensemble régulier de six droites. Donner des valeurs approchées de θ et p associées.

III.1) Soit la droite

$$D_1 \quad \begin{cases} x = r \\ y = pz \end{cases}$$

où p et r sont deux réels donnés, p non nul. On désigne par D_2 et D_3 les droites déduites de D_1 par les rotations d'axe $(O; \vec{k})$ et d'angles respectifs

$$\frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad \frac{4\pi}{3}$$

- a) Déterminer D_2 par un point du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et un vecteur directeur.
- b) Déterminer une symétrie axiale transformant D_2 en D_3 et laissant D_1 globalement invariante.
- c) Donner une relation entre p et r équivalente à la condition $d(D_1, D_2) = 1$

d) Choisir p et r pour que l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3\}$ soit régulier

III.2) Soit b un réel.

$$\text{On prend } r = \frac{b-1}{2}$$

et $p > 0$ dans la définition de D_1 vue à la question III.1). Soit la droite Δ_1 définie par les équations

$$x = \frac{b+1}{2} \quad \text{et} \quad y = qz. \quad \text{On suppose } q < 0.$$

Δ_2 et Δ_3 désignant les droites déduites de Δ_1 par les rotations d'axe $(O; \vec{k})$ et d'angles respectifs $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

- a) Que vaut $d(D_1, \Delta_1)$?
- b) Exprimer p et q en fonction de b de façon que les ensembles $\{D_1, D_2, D_3\}$ et $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ soient réguliers.
- c) p et q ayant les expressions ainsi trouvées en fonction de b , on admet que la condition $d(D_1, \Delta_2) = 1$ équivaut à

$$pq(1 - b^2) = -3b^4 + 26b^2 + 1 \quad (1)$$

On suppose b choisi pour que la condition (1) soit vérifiée. Montrer, sans calcul, que l'ensemble correspondant $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, D_1, D_2, D_3\}$ est régulier.

d) Déterminer $b > 0$ tel que la relation (1) soit vérifiée. (p et q ayant les expressions trouvées en b).