

# CCP PSI 2

## Un corrigé

### 1 Etude de compacité.

1.1. Le polynôme caractéristique de  $S$  est

$$\chi_S = X^2 - 6X + 5 = (X - 1)(X - 5)$$

$S$  possède donc deux valeurs propres :

$$\text{Sp}(S) = \{1, 5\}$$

Les sous-espaces propres étant en somme directe, ils doivent être de dimension 1.  $(\sqrt{3}, -1)$  convient pour la valeur propre 1 et  $(1, \sqrt{3})$  pour la valeur propre 5. On a donc

$$E_1(S) = \text{Vect}((\sqrt{3}, -1)) \quad \text{et} \quad E_5(S) = \text{Vect}((1, \sqrt{3}))$$

On en déduit que

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in O(2)$$

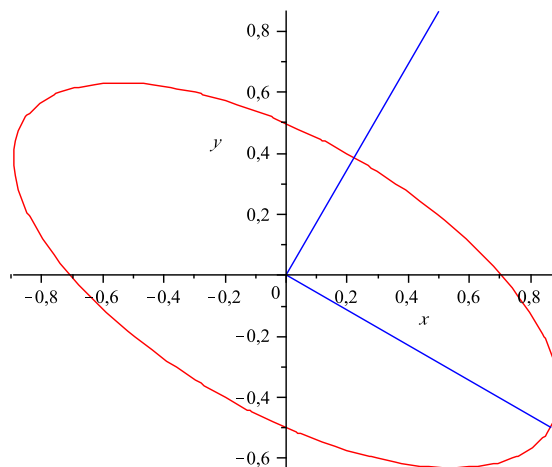
Un calcul immédiat donne

$$(x|s(x)) = 2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2$$

$Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  est la matrice colonne associée à  $x$  dans la base orthonormée  $(f_1, f_2)$  des colonnes de  $P$ . On a ( $P^{-1} = {}^tP$ )

$$(x|s(x)) = {}^tX S X = {}^tX P \text{diag}(1, 5) P^{-1} X = {}^tY \text{diag}(1, 5) Y = y_1^2 + 5y_2^2$$

et l'équation de  $\sigma$  dans le nouveau repère  $(O, (f_1, f_2))$  est  $y_1^2 + 5y_2^2 = 1$ .  $\sigma$  est ainsi une ellipse et on vient d'en donner une équation réduite (les axes sont dirigés par  $f_1$  et  $f_2$  et sont de demi-longueurs 1 et  $1/\sqrt{5}$ ; le centre est  $O$ ). On en déduit l'allure de  $\sigma$ .



**1.2.** On a de même

$$\chi_S = X^2 - 6X = X(X - 6)$$

et comme ci-dessus, on obtient

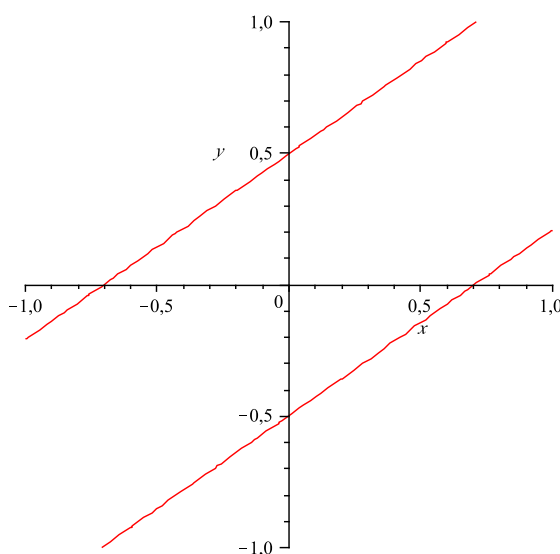
$$\text{Sp}(S) = \{0, 6\}, \quad E_0(S) = \text{Vect}((\sqrt{2}, -1)), \quad E_6(S) = \text{Vect}((1, \sqrt{2}))$$

On a

$$(x|s(x)) = 2x_1^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_2^2$$

Dans le repère  $(O, (f_1, f_2))$  où  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -1)$  et  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2})$  l'équation de  $\sigma$  est  $6y_1^2 = 1$  et  $\sigma$  est la réunion de deux droites horizontales dans le nouveau repère, ce que l'on peut aussi voir en écrivant que

$$(x|s(x)) - 1 = (\sqrt{2}x_1 - 2x_2)^2 - 1 = (\sqrt{2}x_1 - 2x_2 - 1)(\sqrt{2}x_1 - 2x_2 + 1)$$



**2.1.** On a immédiatement

$$(x|s(x)) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \middle| \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \varepsilon_i \right)$$

Comme la base des  $\varepsilon_i$  est orthonormée, on en déduit que

$$(x|s(x)) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i$$

Comme  $\lambda_1 > 0$ , on peut considérer  $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \varepsilon_1$  et il vérifie  $(x|s(x)) = 1$  et est donc dans  $\Sigma$  ce qui montre que

$$\Sigma \neq \emptyset$$

Par ailleurs, et en conservant les notations de l'énoncé

$$\forall x \in \Sigma, \quad 1 = (x|s(x)) \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2$$

et on en déduit que  $\Sigma$  est incluse dans la boule fermée de centre 0 de rayon  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$  et est, en particulier, bornée.

La continuité de  $x \mapsto (x|s(x))$  est conséquence directe de la formule donnée plus haut ( $(x|s(x))$  est une fonction continue des coordonnées de  $x$ ).  $\Sigma$  est alors fermée comme image réciproque de la partie fermée  $\{1\}$  par cette application continue.

$\Sigma$  est finalement une partie compacte (fermée bornée en dimension finie).

## 2.2.

**2.2.1** On a toujours  $(x|s(x)) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i$  et cette quantité est  $\leq 0$  (et donc différente de 1) si  $\lambda_n \leq 0$ . Dans ce cas,  $\Sigma$  est vide, ce qui est exclus.

**2.2.2** Toujours avec la formule précédente,

$$(x_r|s(x_r)) = \lambda_1 r^2 + \lambda_n \frac{1 - \lambda_1 r^2}{\lambda_n} = 1$$

et ainsi,  $x_r \in \Sigma$ . Par ailleurs, et comme la base  $(\varepsilon_i)$  est orthonormale,

$$\|x_r\|^2 = r^2 + \frac{1 - \lambda_1 r^2}{\lambda_n} = \frac{r^2(\lambda_n - \lambda_1) + 1}{\lambda_n}$$

Avec  $\lambda_n - \lambda_1 > 0$  et  $\lambda_n$ , on a alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|x_r\|^2 = +\infty$$

On en déduit que  $\Sigma$  n'est pas bornée et ce n'est donc pas une partie compacte.

## 2 Racine carrée d'une matrice de $S_n^+$ .

**1.1.** Si  $S \in S_n^+$  alors  $\forall X, {}^t X S X \geq 0$ . En particulier,

$$\forall i, \lambda_i = \lambda_i \|X_i\|^2 = {}^t X_i S X_i \geq 0$$

**1.2.** Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; on peut l'écrire  $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$  et alors, la base des  $X_i$  étant orthonormale,

$${}^t X S X = \left( \sum_{i=1}^n x_i X_i \middle| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Si les  $\lambda_i$  sont tous positifs alors  ${}^t X S X \geq 0$  et  $S \in S_n^+$ .

**1.3.** Il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $S = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ . On a alors  $S$  inversible comme produit de telles matrices et

$$S^{-1} = P \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) P^{-1}$$

Cette matrice est symétrique (car  $P^{-1} = {}^t P$ ) et ses valeurs propres sont  $> 0$  (ce sont les  $1/\lambda_i$ ). On a donc (avec le résultat admis)

$$S^{-1} \in S_n^{++}$$

**2.1.** De manière immédiate,

$$\Delta^2 = D$$

En composant  $NY = \mu Y$  par  $N$ , on obtient  $N^2 Y = \mu^2 Y$  et donc  $DY = \mu^2 Y$  ce qui donne, en regardant coordonnée par coordonnée,

$$\forall i \in [1, n], \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$$

Si  $y_i \neq 0$  alors  $\mu^2 = \lambda_i$  et donc  $\mu = |\mu| = \sqrt{\lambda_i}$  et donc  $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$ . Ceci reste bien sûr vrai si  $y_i = 0$  et ainsi

$$\forall i \in [1, n], \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$$

Ceci s'écrit matriciellement  $\mu Y = \Delta Y$  ou encore  $NY = \Delta Y$ . Comme  $N$  est symétrique, il existe une base  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres pour  $N$ . Ce qui précède donne  $NY_i = \Delta Y_i$  pour tout  $i$ . Par combinaisons linéaires (et comme les  $Y_i$  forment une base),  $NY = \Delta Y$  est vrai pour tout  $Y$  et donc

$$\Delta = N$$

(puisque les applications linéaires canoniquement associées à  $N$  et  $\Delta$  sont égales).

**2.2.** Si la matrice  $T$  convient (on raisonne ici par conditions nécessaires) alors  $T^2 = UD^tU$  et donc (comme  ${}^tU = U^{-1}$ )

$$({}^tUTU)^2 = {}^tUT^2U = D$$

${}^tUTU$  est symétrique et semblable à  $T$  donc à valeurs propres positives. C'est donc un élément de  $S_n^+$ . La question précédente indique que  ${}^tUTU = \Delta$  et on a donc

$$T = U\Delta{}^tU$$

Réciproquement, il suffit de faire le calcul pour vérifier que pour ce choix de  $T$ ,  $T^2 = S$ . De plus,  $T$  est symétrique et positive (semblable à  $\Delta$  et donc à valeurs propres positives).

On a donc montré que

$$\forall S \in S_n^+, \exists ! T \in S_n^+ / T^2 = S$$

**3.1.** On a

$$L_k(S)X_i = \left( \prod_{j \neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} \right) \left( \prod_{j \neq k} (S - \mu_j I_n) \right) X_i$$

Comme  $(S - \alpha I_n)X_i = (\lambda_i - \alpha)X_i$ , on montre de proche en proche que

$$L_k(S)X_i = \left( \prod_{j \neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} \right) \left( \prod_{j \neq k} (\lambda_i - \mu_j) \right) X_i$$

Distinguons deux cas.

- Si  $\mu_k = \lambda_i$  alors  $L_k(S)X_i = X_i$ .
- Sinon,  $\lambda_i$  est égal à un  $\mu_j$  avec  $j \neq k$  et  $L_k(S)X_i = 0$ .

**3.2.**  $L_k$  est nul en  $\mu_j$  pour  $j \neq k$  et vaut 1 en  $\mu_k$ . Ainsi,

$$P = \sum_{k=1}^p \sqrt{\mu_k} L_k$$

Avec la question précédente,

$$P(S)X_i = \sum_{k=1}^p \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i$$

$(X_1, \dots, X_n)$  est une base de vecteurs propres pour  $P(S)$  et les valeurs propres de  $P(S)$  sont exactement les  $\sqrt{\lambda_i}$  et sont positives. Comme  $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$  on a finalement

$$P(S) \in S_n^+$$

On a  $P(S)^2 X_i = P(S)(P(S)X_i) = P(S)(\sqrt{\lambda_i} X_i) = \sqrt{\lambda_i} P(S)X_i = \lambda_i X_i = SX_i$ . Ainsi  $P(S)^2 = S$  (les endomorphismes canoniquement associés étant égaux sur une base). Par unicité, on a prouvé que

$$P(S) = \sqrt{S}$$

**3.3.**  $(0, 1, 1)$  et  $(1, -2, 0)$  sont vecteurs propres indépendants pour  $S$  associés à la valeur propre 3. Par considération de trace, la valeur propre restante vaut 9. Une résolution au brouillon montre que  $(2, 1, -1)$  est vecteur propre associé à la valeur propre 9. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a exactement

$$\text{Sp}(S) = \{3, 9\}, \quad E_3(S) = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, -2, 0)), \quad E_9(S) = \text{Vect}((2, 1, -1))$$

Pour calculer  $\sqrt{S}$ , on recherche le polynôme interpolateur  $P$  :

$$P = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}X + \frac{3\sqrt{3} - 3}{2}$$

(il vaut  $\sqrt{3}$  en 3, 3 en 9 et est de degré  $\leq 1$ ) et ainsi

$$\sqrt{S} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}S + \frac{3\sqrt{3} - 3}{2}I_n$$

### 3 Une propriété de la trace des matrices de $S_n^+$ .

**1.1.** On a  $(\delta V)_{i,i} = \alpha_i v_{i,i}$ . Comme  $V \in O(n)$ , tous ses coefficients sont dans  $[-1, 1]$  (la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1) et en particulier,  $v_{i,i} \leq 1$ . Comme les  $\alpha_i$  sont positifs (pas de changement de sens d'inégalité) on a donc

$$\text{tr}(\delta V) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i = \text{tr}(\delta)$$

**1.2.** Comme  $S \in S_n^+$ , il existe  $V \in O(n)$  et  $\delta$  diagonale à coefficients positifs tels que  $S = {}^t V \delta V$ . Comme  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  on a alors

$$\text{tr}(SU) = \text{tr}({}^t V \delta V U) = \text{tr}(\delta V U {}^t V)$$

$V U {}^t V = V U V^{-1} \in O(n)$  (car c'est un groupe) et  $\text{tr}(\delta) = \text{tr}(S)$  (invariance par similitude). On en déduit que

$$\text{tr}(SU) \leq \text{tr}(\delta) = \text{tr}(S)$$

**2.1.** Si  $a = b = 0$  alors le résultat est immédiat (tout choix de  $\varphi$  convient). Sinon,  $M = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$  est sur le cercle unité et il existe  $\varphi$  tel que  $M = (\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ . On a alors

$$a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}(\sin(\varphi) \cos(\theta) + \cos(\varphi) \sin(\theta)) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$$

Si  $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) \leq a$  pour tout  $\theta$  alors  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi) \leq a$  pour tout  $\theta$ . En choisissant  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , on a donc  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a$  et donc  $b = 0$ .

**2.2.** En notant  $(E_{i,j})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$U = \sum_{i \notin \{p,q\}} E_{i,i} + \cos(\theta)(E_{p,p} + E_{q,q}) + \sin(\theta)(E_{q,p} - E_{p,q})$$

Comme  $AE_{i,j}$  est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la  $j$ -ème qui contient la  $i$ -ème de  $A$ , sa trace vaut  $a_{j,i}$ . Ainsi,

$$\text{tr}(AU) = \sum_{i \notin \{p,q\}} a_{i,i} + \cos(\theta)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q} - a_{q,p})$$

$\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$  se traduit donc par  $\cos(\theta)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q} - a_{q,p}) \leq (a_{p,p} + a_{q,q})$ . Ceci étant vrai pour tout  $\theta$ , la question précédente donne  $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$ . Ceci étant vrai pour tout choix de  $p < q$ , on a donc

$$A \in S_n(\mathbb{R})$$

**2.3.** Il existe  $P \in O(n)$  telle que  $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$  et  $\text{tr}(A) = \beta_1 + \dots + \beta_n$ . Par définition,  $P^{-1}UP = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . On a alors (la trace est invariante par similitude et  $P^{-1}AUP = \text{diag}(-\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ )

$$\text{tr}(AU) = -\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \leq \beta_1 + \dots + \beta_n = \text{tr}(A)$$

On en déduit que  $\beta_1 \geq 0$ . On procède de même pour les autres  $\beta_i$ . On en déduit que  $A$  est à valeurs propres positives et, avec la question précédente,

$$A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

## 4 Des inégalités remarquables.

1. Par inégalité de Schwarz,

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leq (t(x)|t(x))(t^{-1}(x)|t^{-1}(x))$$

$t$  et  $t^{-1}$  sont autoadjoints puisque représentés par des matrices symétriques ( $T$  et  $T^{-1}$ ) en base orthonormale. On a ainsi

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leq (t^2(x)|x)((t^{-1})^2(x)|x)$$

de  $t^2 = s$ , on tire  $(t^{-1})^2 = s^{-1}$  et on obtient alors l'inégalité (1). Il y a égalité si  $t(x)$  et  $t^{-1}(x)$  sont des vecteurs liés c'est à dire s'il existe  $\lambda$  tel que  $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$  c'est à dire  $t^2(x) = \lambda x$  ou encore  $s(x) = \lambda x$ . Il y a donc égalité pour les vecteurs propres de  $s$  (plus le vecteur nul).

*Remarque : comme  $t$  est autoadjoint,  $(t^{-1}(x)|t(x))^2 = \|x\|^4$ .*

2.  $P(a) = (a - \lambda_1)(a - \lambda_n)$ . Tous les  $\lambda_i$  sont situés entre les racines de  $P$  et on a donc

$$\forall i, P(\lambda_i) \leq 0$$

Comme  $s(x) = \lambda_i x$ ,  $s^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda_i} x$  et  $P(s)(x) = P(\lambda_i)x$ . Ainsi

$$v(x) = -P(s)\left(\frac{1}{\lambda_i}x\right) = -\frac{1}{\lambda_i}P(s)(x_i) = -\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}x$$

En notant  $(x_1, \dots, x_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres pour  $s$  (elle existe car  $s$  est autoadjoint), on obtient une base orthonormée de vecteurs propres pour  $v$  associés à des valeurs propres postive ( $-\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} \geq 0$ ). Ainsi

$$V \in S_n^+$$

3. On a

$$Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n \text{ et } Q(1) = (s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + \lambda_1\lambda_ns^{-1}(x)|x) = -(v(x)|x)$$

$S^{-1}$  et  $V$  étant dans  $S_n^+$ , on a donc

$$Q(0) \geq 0 \text{ et } Q(1) \leq 0$$

Pour  $x \neq 0$ ,  $Q$  est un polynôme du second degré (car  $(s(x)|x) > 0$ ) qui possède une racine réelle (car  $Q(0)Q(1) \leq 0$  et  $Q$  est continue donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, son discriminant est supérieur ou égal à 0, i.e.

$$(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4$$

L'inégalité reste vraie si  $X = 0$ .

4.  $x_1$  et  $x_n$  sont orthogonaux car  $\lambda_1 \neq \lambda_n$  et les sous-espaces propres de  $s$  sont en somme directe orthogonale. On a ainsi

$$(s(x)|x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_n x_n | x_1 + x_n) = \lambda_1 + \lambda_n$$

$$(s^{-1}(x)|x) = (\lambda_1^{-1}x_1 + \lambda_n^{-1}x_n | x_1 + x_n) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}$$

$$(x|x) = (x_1 + x_2 | x_1 + x_2) = (x_1|x_1) + (x_2|x_2) = 2$$

On a donc bien égalité dans (2).