SESSION DE 1988

CONCOURS EXTERNE

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif du problème

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par la relation

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}. \tag{1}$$

La somme γ de la série de terme général u_p s'appelle constante d'Euler et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p. \tag{2}$$

On désigne par S et R les fonctions définies respectivement sur $]-\infty, +\infty[$ et sur $]0, +\infty[$ par les relations

$$S(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt \quad \text{et} \quad R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt. \tag{3}$$

Enfin, on note Γ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{4}$$

Dans la partie I, on étudie la convergence de la série et des intégrales précédentes, on établit une expression intégrale de γ à l'aide des fonctions S et R, et on relie γ à la valeur de la dérivée Γ' de Γ au point 1.

La partie II décrit un procédé d'approximation de γ par accélération de convergence de la suite (γ_n).

La partie III décrit un autre procédé d'approximation de γ, fondé sur un développement de S en série entière et sur un développement asymptotique de R.

I. Définition et expressions intégrales de la constante d'Euler

1. CONVERGENCE DE LA SÉRIE DÉFINISSANT γ.

a. Prouver que, pour tout $p \geqslant 1$,
$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Établir que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

b. Établir que, pour tout $p \geqslant 1$,
$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du. \tag{5}$$

En déduire que, pour tout $p \geqslant 2$,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

et que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

c. On approche γ par γ_n. Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} ; même question pour la précision 10^{-8}. (On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n.)

d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$\gamma_{n,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}.$$
Prouver que $0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

Tournez la page S.V.P.

e. Reprendre la question c lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,1}$; déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2}.

2. **Expression intégrale de γ à l'aide de S et R.**

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par les relations : $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

b. Établir la convergence des intégrales (3) et prouver que S et R sont de classe C^1 respectivement sur $\mathbf{R}$ et sur $]0, +\infty[$.

c. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\,dv.$$

À cet effet, on pourra calculer la somme $1 + (1-v) + \dots + (1-v)^{n-1}$.

d. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\,dt,$$

où e_n est la fonction définie sur $[0, n]$ par la relation $e_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

e. Établir que, pour tout nombre réel v,
$$(6) \qquad 1 + v \leqslant e^v.$$

f. Établir que, pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout nombre réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$,
$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant e_n(t) \leqslant e^{-t}.$$

$\left(\text{On pourra appliquer (6) en prenant } v = \dfrac{t}{n} \text{ et } v = -\dfrac{t}{n}.\right)$

En déduire que, dans les mêmes conditions,
$$0 \leqslant e^{-t} - e_n(t) \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

g. Montrer finalement que
$$(7) \qquad \gamma = S(1) - R(1).$$

3. **Expression de γ à l'aide de la dérivée de Γ.**

a. Établir que, pour tout nombre réel $x > 0$, l'intégrale (4) est convergente.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Γ_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{x-1}\,dt$.
Prouver que Γ_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c. Montrer que Γ_n converge vers Γ uniformément sur tout intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$.

d. Pour tout nombre réel $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t\,dt.$$

Établir la convergence de cette intégrale. Prouver que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\Gamma' = F$.

En particulier,
$$(8) \qquad \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\,dt.$$

e. À partir des relations (7) et (8), montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

II. Approximation de γ par accélération de convergence de la suite (γ_n)

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on désigne par φ_k la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par les relations
$$\varphi_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\dots(t+k)} \quad \text{si } k \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{t}.$$

Enfin, pour tout entier $j \geqslant 1$, on note N_j le polynôme défini par les relations
$$N_j(X) = X(1-X)(2-X)\dots(j-1-X) \quad \text{si } j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad N_1(X) = X.$$

Tournez la page S.V.P.

1. Sommation des séries télescopiques.

On note Δ l'endomorphisme de l'espace E des fonctions numériques f continues sur $]0, +\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$ défini par la relation $\Delta f(x) = f(x) - f(x+1)$.

a. Soit f un élément de E. Établir la convergence de la série de terme général $\alpha_p = \Delta f(p)$. Calculer la somme de cette série et le reste à l'ordre n de cette série, c'est-à-dire $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta f(p)$, où $n \geq 0$.

b. Calculer, pour tout $k \geq 1$, $\Delta \varphi_{k-1}$. Établir la convergence de la série de terme général $\varphi_k(p)$, où $p \geq 1$, et prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \varphi_k(p) = \frac{1}{k}\,\frac{n!}{(n+k)!}.$$

2. Accélération de la convergence : premier pas.

L'idée consiste à écrire le terme général u_p de la série donnant γ, qui est équivalent à $\frac{1}{2p^2}$, comme somme de deux termes dont l'un est télescopique et l'autre est de l'ordre de $\frac{1}{p^3}$. À cet effet, on part de la formule (5) et on approche, sur $[0, 1]$, $\frac{1}{p+u}$ par une constante en écrivant que

$$\frac{1}{p+u} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1}\,\frac{1-u}{p+u}.$$

a. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,

$$u_p = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}\,du.$$

b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$(9) \qquad r_n = \frac{1}{2(n+1)} + r_{n,1}, \qquad \text{où} \qquad 0 \leq r_{n,1} \leq \frac{1}{12\,n(n+1)}.$$

3. Accélération de la convergence : k-ième pas.

Pour tout entier $j \geq 1$, on pose

$$\lambda_j = \int_0^1 N_j(u)\,du.$$

a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout entier $p \geq 1$,

$$u_p = \frac{\lambda_1}{p(p+1)} + \frac{\lambda_2}{p(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{\lambda_k}{p(p+1)\dots(p+k)} + \rho_{p,k}, \qquad \text{où} \quad \rho_{p,k} = \frac{1}{p(p+1)\dots(p+k)}\int_0^1 \frac{N_{k+1}(u)}{p+u}\,du.$$

b. Établir enfin que, pour tout entier $k \geq 1$, et pour tout entier $n \geq 1$,

$$(10) \qquad r_n = \frac{\lambda_1}{n+1} + \frac{\lambda_2}{2(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\lambda_k}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)} + r_{n,k},$$

$$\text{où} \quad 0 \leq r_{n,k} \leq \frac{\lambda_{k+1}}{(k+1)\,n(n+1)\dots(n+k)}.$$

c. À partir de (10), construire une suite $(\gamma_{n,k})$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \gamma - \gamma_{n,k} \leq r_{n,k}$.

4. Calcul des nombres λ_n par emploi d'une série génératrice.

a. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{(n-1)!}{6} \leq \lambda_{n+1} \leq \frac{n!}{6}.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$1 + \lambda_1 x - \frac{\lambda_2}{2!}x^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{n!}x^n + \dots$$

Soit $G(x)$ la somme de cette série.

b. Écrire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^u$ où u est réel strictement positif, et où $|x| < 1$. Prouver que, x étant fixé, on peut intégrer terme à terme par rapport à u sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que, si $x \neq 0$,

$$G(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

c. Expliciter un système linéaire triangulaire permettant de calculer les nombres λ_n par récurrence.

Tournez la page S.V.P.

5. APPLICATION NUMÉRIQUE.

On se propose d'obtenir une valeur décimale approchée de γ à la précision de 10^{-8}. On prend $k = 4$.

a. Calculer λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et majorer λ_5.

b. Déterminer un entier n tel que $r_{n,4} \leq 7 \cdot 10^{-9}$.

c. n étant ainsi fixé, calculer $\gamma_{n,4}$ à la précision $2 \cdot 10^{-9}$. On précisera l'algorithme utilisé pour calculer $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et on justifiera que la précision demandée est effectivement obtenue.

III. Approximation de γ par développement de S en série entière

La méthode consiste à évaluer γ en fonction de $S(x)$ et $R(x)$, en prenant x assez grand pour que $R(x)$ soit petit et, x étant fixé, d'approcher $S(x)$ à l'aide d'un développement en série entière.

1. NOUVELLE EXPRESSION INTÉGRALE DE γ.

À partir de la formule (7), prouver que, pour tout nombre réel $x > 0$, $\gamma = S(x) - R(x) - \ln x$.

. ÉVALUATION ASYMPTOTIQUE DE $R(x)$.

a. Montrer que, pour tout $k \geq 1$ et pour tout nombre réel x strictement positif,

$$(11) \qquad R(x) = e^{-x} \sum_{j=0}^{j=k-2} \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + R_k(x), \qquad \text{où} \qquad R_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^k}\, dt.$$

(Lorsque $k = 1$, on convient que $R_1 = R$.)

b. Prouver que, dans ces mêmes conditions,

$$(12) \qquad |R_k(x)| \leq (k-1)! \frac{e^{-x}}{x^k}$$

et que $|R_k(x)|$ est équivalent à $(k-1)! \frac{e^{-x}}{x^k}$ lorsque $x \to +\infty$.

c. Montrer que, x étant fixé, $|R_k(x)| \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$. (On pourra minorer l'intégrale donnant R_k en intégrant sur $[x, 2x]$.)

Montrer enfin que $|R_k(k)| \leq e^{-(2k-1)}$. À cet effet, on établira que $\ln k! \leq (k+1) \ln k - k + 1$.

. APPROXIMATION DE $S(x)$ PAR DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE.

a. Prouver que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout nombre réel x,

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p \cdot p!} + \cdots$$

b. On suppose désormais que $x \geq 1$, et on pose $a_p(x) = \frac{x^p}{p \cdot p!}$. Montrer que la suite $p \mapsto a_p(x)$ est décroissante à partir du rang $p = [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

c. Soit n un entier tel que $n \geq [x]$. On pose $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-1)!}$.

Prouver que $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n}{n\, n!}$, puis que $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}}$.

. OBTENTION D'UNE GRANDE PRÉCISION POUR γ.

On se propose de décrire deux méthodes de calcul d'une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-1000}.

a. On prend $k = 1$. Déterminer un nombre entier x tel que $R(x) \leq \frac{1}{3} 10^{-1000}$. Ce nombre x étant ainsi fixé, déterminer un entier n tel que $S(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{3} 10^{-1000}$.

b. On prend $k = x$. Déterminer k de telle sorte que $R_k(k) \leq \frac{1}{3} 10^{-1000}$. Ces nombres x et k étant ainsi fixés, déterminer un entier n tel que $S(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{3} 10^{-1000}$.

c. Les nombres k, x et n étant fixés, expliciter des algorithmes performants pour le calcul de $S_n(x)$ et pour celui de $R(x) - R_k(x)$. (Il n'est pas demandé d'étudier les problèmes posés par les erreurs d'arrondi.)

• • •