

CORRIGÉ DE CENTRALE PC 2013

1. $O_2(\mathbb{R})$

IA1) C'est du cours. Une façon rapide est de dire que si $A \in O_2$, on a déjà la première colonne qui est un vecteur unitaire, donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. La deuxième colonne doit être unitaire aussi et orthogonale à la précédente (caractérisation des matrices orthogonales), c'est donc $\pm \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. La condition supplémentaire que $\det A = +1$ permet de choisir la première de ces deux solutions.

IA2) Quel que soit le langage, on teste si la première colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie $a^2 + b^2 = 1$. Si c'est le cas, on teste si la deuxième colonne est bien $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

IA3) La surjectivité est la question **1)**, la question est : est-ce un morphisme ? Un calcul trivial montre que

$$R_t \times R_s = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} = R_{t+s}$$

car $\cos t \cos s - \sin t \sin s = \cos(t + s)$, etc.

$R_t = R_{t+2\pi}$ donc l'application n'est pas injective.

IB1, 2) Soit $X \in \mathbb{R}^n$; c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$AX = \lambda X \iff P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X = \lambda Y \iff BY = \lambda Y$$

en posant $Y = P^{-1}X$. Ce qui répond aux deux questions. En particulier les vecteurs propres de A (les X) sont les images par P de ceux de B (à savoir les Y , puisque $X = PY$).

IC1) Les valeurs propres sont clairement ± 1 et les espaces propres sont les axes (Ox) et (Oy) . Comme ils sont orthogonaux, la symétrie est orthogonale.

On peut aussi vérifier que ${}^tK_2 = K_2$ (matrice symétrique) et $K_2^2 = I_2$ (c'est une symétrie), ce qui implique au passage que K_2 est orthogonale (${}^tK_2K_2 = I_2$).

IC2) Le calcul du **B)** montre qu'une base de vecteurs propres de $B = R_t^{-1}K_2R_t$ est l'image par R_t^{-1} d'une telle base pour $A = K_2$. On a donc les vecteurs propres $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 . On reconnaît encore une symétrie orthogonale, la symétrie orthogonale d'axe dirigé par le premier vecteur. Puisqu'on a ainsi toutes les symétries orthogonales, on a...

IC3) ... toutes leurs matrices en effectuant $R_t^{-1}K_2R_t$. Il eût été plus facile de finir la discussion de **IA1)** (où l'angle paramètre s'appelait t et non $2t$).

2. Matrices directement orthogonalement semblables

A1) A dos A est triviale car $A = |A|$. Si A dos B , c'est que $B = P^{-1}AP$ pour une certaine $P \in SO_n(\mathbb{R})$, mais alors $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ où $P^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$ et donc B dos A . Enfin (j'abrège) si on a

$$B = P^{-1}AP \text{ et } C = Q^{-1}BQ \text{ alors } C = (PQ)^{-1}A(PQ), PQ \in SO_n(\mathbb{R})$$

car $SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe (on aura utilisé sa stabilité par inverse et par produit interne) ;

Sans le dire on a montré que "dos" est une relation d'équivalence, pour ceux qui ont étudié cette notion.

A2) Par calcul direct, toute matrice dos à αI est αI .

A3) Le groupe SO_2 étant commutatif, on trouve que seule A est dos à A .

A4) D'après **IC2)** on trouve exactement toutes les symétries orthogonales, c'est à dire le complémentaire de SO_2 dans O_2 . Le contraste est fort : les classes d'équivalence sont des points pour les rotations, et tout l'ensemble des symétries sinon.

B1) Par le théorème spectral, il existe un changement de B.O.N. qui transforme la deuxième matrice en la première. Quitte à changer le deuxième vecteur du changement de base en son opposé, on peut supposer que le changement de B.O.N. est direct, i.e. il a bon dos (le calembour est irrésistible).

On peut aussi faire le calcul et exhiber la matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2$.

B2) Les espaces propres de la deuxième matrice sont engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui ne sont pas orthogonaux contrairement à ceux de la première matrice : il ne peut donc y avoir de changement de B.O.N. qui change l'un en l'autre, les matrices ne sont pas os.

B3) De plus en plus fort (et calculatoire) : on a trouvé des vecteurs propres $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (associées respectivement aux vp 1 et 2) de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; pour sa transposée $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ on trouve (avec les mêmes valeurs propres) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Toute matrice de passage qui transforme l'une en l'autre doit envoyer $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur (un multiple de) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On doit donc avoir

$$P \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ a & 2b \end{pmatrix} \iff P = \begin{pmatrix} -a-b & -a-2b \\ -a-2b & -a-4b \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut être orthogonale, à condition que

$${}^t P P = \begin{pmatrix} 2a^2 + 6ba + 5b^2 & 2a^2 + 9ba + 10b^2 \\ 2a^2 + 9ba + 10b^2 & 2a^2 + 12ba + 20b^2 \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui donne deux solutions [on commence par extraire que $ab = -1$], $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{5/2} \\ \sqrt{2/5} \end{pmatrix}$. Les matrices P correspondantes sont bien orthogonales mais pas des rotations :

$$P = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{5}{2}} - 4\sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix}.$$

(calculatrice utile...)

3. Cercles propres

A1) Il vient $\varphi_A(x, y) = x^2 + y^2 - (a+d)x + (c-b)y + ad - bc$. On reconnaît la forme générale de l'équation d'un cercle. Vérifions qu'il n'est pas vide :

$$x^2 + y^2 - (a+d)x + (c-b)y + ad - bc = \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{c-b}{2}\right)^2 + ad - bc - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$$

et donc

$$\varphi_A(x, y) = 0 \iff (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2 = R_A^2$$

car le second membre est positif. Le centre a donc pour coordonnées $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d \\ b-c \end{pmatrix}$.

A2) On résout l'équation précédente avec simultanément $y = 0$. Il reste

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

et cette équation a deux racines si et seulement si son discriminant est positif :

$$\Delta_A = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc \geq 0$$

et aucune si $\Delta_A < 0$ (une si $\Delta_A = 0$).

A3) Sur la définition on reconnaît que $\varphi_A(x, 0) = 0 \iff \det(A - xI) = 0 \iff x \in \text{Sp}(A)$: les solutions sont les valeurs propres (réelles...) de A . D'après le calcul précédent, il y en a deux ssi $\Delta_A \geq 0$, etc.

B1) On échange les rôles de b, c donc cela ne change que la deuxième coordonnée du centre (et pas le rayon), le cercle propre de la transposée est le symétrique par rapport à (Ox) du cercle propre initial.

B2) La condition $b = c$ est équivalente à \mathcal{CP}_A sur l'axe (Ox) .

B3a) Le rayon du cercle est nul si et seulement si $a = d$ et $b = -c$. On reconnaît des matrices de similitudes directes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

si on définit l'angle t par $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $\sin t = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

B3b) Dans ce cas, les coordonnées du centre sont $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

L'énoncé demande de traiter le cas où ce point est de la forme $a = \cos t$, $b = \sin t$:

$$\text{alors } A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO_2.$$

L'autre cas est $b = 0$, on a alors $A = aI_2$.

B3c) Ici on aura $a = 0$, il reste une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = bK_2$, on a une similitude (d'angle $\pi/2$ et de rapport b).

C Question banco !

A et B ont même cercle propre \iff on a les centres et rayons de ces deux cercles qui sont identiques. Posons

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, la condition est donc le triplet d'équations

$$\begin{cases} a + d & = x + t \\ b - c & = y - z \\ (a - d)^2 + (b + c)^2 & = (x - t)^2 + (y + z)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + d & = x + t \\ b - c & = y - z \\ (a + d)^2 - 4ad + (b - c)^2 + 4bc & = (x + t)^2 - 4xt + (y - z)^2 - 4yz \end{cases}$$

et il reste

$$(S) \quad \begin{cases} a + d & = x + t \\ b - c & = y - z \\ ad - bc & = xt - yz \end{cases}$$

On reconnaît fort bien la première et la troisième condition : elles signifient que trace et déterminant sont identiques (ce qui est nécessaire pour que A et B soient semblables).

Examinons maintenant la condition de pos : le calcul de $AP = PB$ la ramène à l'existence d'un angle $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta & b \cos \theta - a \sin \theta \\ c \cos \theta + d \sin \theta & d \cos \theta - c \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - z \sin \theta & y \cos \theta - t \sin \theta \\ x \sin \theta + z \cos \theta & t \cos \theta + y \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de vérifier alors le système (S), car la seule équation qui ne résulte pas immédiatement de la similitude des deux matrices est obtenue par combinaison des quatre égalités, en effet

$$\begin{aligned} b - c &= (a \cos \theta + b \sin \theta) \sin \theta + (b \cos \theta - a \sin \theta) \cos \theta \\ &\quad - (c \cos \theta + d \sin \theta) \cos \theta + (d \cos \theta - c \sin \theta) \sin \theta \\ &= y - x \end{aligned}$$

en remplaçant les contenus des parenthèses.

Plus difficile est la réciproque (partant de $b - c = y - x$, trouver le θ). On écrit un système de quatre équations où la seule inconnue est θ mais l'on donne les conditions (S) :

Cherchons à résoudre

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \sin \theta = x \cos \theta - z \sin \theta \\ b \cos \theta - a \sin \theta = y \cos \theta - t \sin \theta \\ c \cos \theta + d \sin \theta = x \sin \theta + z \cos \theta \\ d \cos \theta - c \sin \theta = t \cos \theta + y \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} (a - x) \cos \theta + (b + z) \sin \theta = 0 \\ (b - y) \cos \theta + (t - a) \sin \theta = 0 \\ (c - x) \cos \theta + (d - z) \sin \theta = 0 \\ (d - t) \cos \theta - (c + y) \sin \theta = 0 \end{cases}.$$

Compte tenu de $a + d = x + t$ et $b - c = y - z$, on peut supprimer la moitié des équations (par exemple la dernière équivaut à la première). Il reste

$$\begin{cases} (a - x) \cos \theta + (b + z) \sin \theta = 0 \\ (b - y) \cos \theta + (t - a) \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Or le déterminant de ce système vaut

$$(a - x)(t - a) - (b + z)(b - y) = -a^2 - b^2 + a(t + x) + b(y - z) + yz - xt = -a^2 - b^2 + a(a + d) + b(b - c) + bc - ad = 0!!!$$

en utilisant toutes les équations de (S). Il existe donc une droite de solutions [et même plus si $a = x$, $b = -z$ etc. . .], dans laquelle on choisit un vecteur directeur unitaire et donc une solution de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ce qui achève de démontrer l'équivalence.

D1) On obtient la jolie figure suivante :

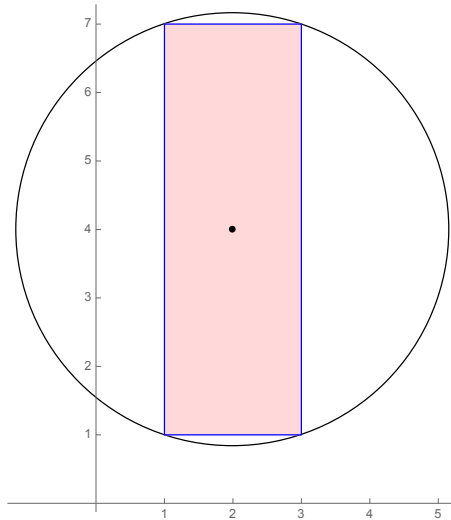


FIGURE 1. Le rectangle EGFH

D2) Curieusement le sujet ne demande pas la propriété qui saute aux yeux sur le dessin, à savoir que (EF) et (GH) sont deux diamètres de \mathcal{CP}_A . En effet, les milieux de ces deux couples coïncident et on reconnaît les coordonnées du centre \mathcal{C}_A du cercle. De plus les longueurs sont identiques et on reconnaît le double du rayon \mathcal{R}_A . On en déduit aisément que (EGFH) est un rectangle puisque, par exemple le triangle (EGF) est rectangle par la propriété de l'hypothénuse qui est diamètre du cercle circonscrit.

D3)

- Si $E = G$: matrice antisymétrique.
- Si $E = F$ (ce qui équivaut à $G = H$), on retrouve les similitudes directes.
- $E = H$ (ou $F = G$ signifie que les termes diagonaux sont égaux.

E1) On a trouvé en **III.C)** une CNS pour être pos, qui est l'invariance des quantités $a + d$, $b - c$ et $ad - bc$. Ici

$$\text{cela se traduit par } \begin{cases} a + d &= 2\alpha \\ c - b &= 2\beta \\ ad - bc &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \end{cases} .$$

Les deux premières équations déterminent α , β , la dernière a deux solutions en γ dont une seule racine positive. Vérifions qu'elle n'est pas imaginaire :

$$\gamma^2 = -ad + bc + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

E2) On a vu en **A3)** que le nombre de valeurs propres dépend du signe de $(a-d)^2 + 4bc = 4\gamma^2 - 4\beta^2$: il y en a donc 2 réelles distinctes ssi $|\gamma| > |\beta|$, 1 double en cas d'égalité et 0 sinon.

E3)

$$\begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -\beta \\ \beta & \alpha - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} + \gamma K_2$$

en posant $\cos t = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $\sin t = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ comme on l'a déjà vu.

Ceci montre (après le changement de bases orthonormales qui change A en la matrice normalisée) qu'on a bien la décomposition voulue, avec t comme ci-dessus, $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\ell = \gamma$. L'angle t' est donné par le calcul de **I C3)**, c'est celui de la rotation qui change A en l'autre matrice et on a vu qu'il est solution de $(a-x)\cos t' + (b+z)\sin t' = 0$ soit ici $t' = \arctan \frac{x-a}{b+z} = \arctan \frac{\alpha + \gamma - a}{b + \beta}$.

Remarque : $\ell = -\gamma$ conviendrait aussi, c'est sans doute pourquoi on exige la positivité.

E4) On a intérêt (quel que soit le langage utilisé) à calculer comme variables intermédiaires α , β et γ (donnés explicitement par les formules ci-dessus). On en déduit k , ℓ sans autre forme de procès. On peut calculer t'

par la fonction arctan comme il est dit, pour t c'est plus délicat car c'est un angle modulo 2π . Si on dispose de la fonction \arg ce sera $\arg(\alpha + i\beta)$, sinon il faut discuter selon les signes. En Python on peut faire

```
from cmath import *
z=complex(alpha,beta)
print(phase(z))
```

4. Cercle propre et réduction

A1) Comme on l'a vu en partie I, λ_1, λ_2 ne sont autres que les valeurs propres de A . Ici on les suppose distinctes, A est donc diagonalisable (condition suffisante de diagonalisabilité).

A2) Rappelons que $\vec{E} = (d, -c)$. Faisons le calcul pour $L_1 \vec{E} = \begin{pmatrix} d-\lambda_1 \\ -c \end{pmatrix}$, l'autre est identique :

$$A \cdot L_1 \vec{E} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d-\lambda_1 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc - a\lambda_1 \\ -c\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 - a\lambda_1 \\ -c\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \lambda_2 - a \\ -c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} d - \lambda_1 \\ -c \end{pmatrix}$$

compte tenu de ce que $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$.

A3) La condition $c \neq 0$ sert à assurer que les deux vecteurs sont indépendants. Si $c = 0$ les valeurs propres sont a et d et les deux vecteurs proposés sont... nuls ! Mais tout vecteur horizontal non nul est un vecteur propre associé à a (par exemple \vec{FH}). On peut calculer un autre vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ en résolvant le

système $\begin{cases} ax + by = dx \\ dy = dy \end{cases}$, une solution est $\begin{pmatrix} b \\ d-a \end{pmatrix} = \vec{HG}$ tourné de $\pi/2$.

A4) Les deux questions précédentes permettent d'affirmer que l'on peut tracer les axes propres à l'aide du cercle. Ceci détermine leur angle à π près, et donc son cosinus au signe près.

On sait que quand A est symétrique les axes propres sont orthogonaux et ce cosinus est donc nul.

A5) On a $a + d = b - c = 0$ et $(a - d)^2 + (b + c)^2 = 4$, ce qui donne $d = -a, c = b, a^2 + b^2 = 1$: A est une réflexion orthogonale.

A6) Maintenant $a + d = 1, b = c$ et $(a - d)^2 + (b + c)^2 = 1$ soit $(2a - 1)^2 + 4b^2 = 1$: il existe un angle t tel

$$\text{que } 2a - 1 = \cos t, 2b = \sin t \text{ et } A = \begin{pmatrix} \cos^2(t/2) & \frac{\sin t}{2} \\ \frac{\sin t}{2} & \sin^2(t/2) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique, ses valeurs propres vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1, \lambda_1 \times \lambda_2 = \text{Det}(A) = 0$ i.e.

$\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$: c'est la projection orthogonale sur $\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ (on peut aussi vérifier que $A^2 = A$).

B1) Ici on a $L_1 = L_2 = L$ c'est à dire que $\lambda_1 = \lambda_2$: la matrice est donc trigonalisable, mais pas diagonalisable (sinon ce serait une homothétie, i.e. $a = d, b = c = 0$ mais le rectangle serait alors aplati).

B2) \vec{LE} doit rester propre sauf si $c = 0$ auquel cas un côté horizontal du rectangle fait l'affaire.

B3) La condition d'égalité des v.p. est que $(a - d)^2 + 4bc = 0$, le centre sur (Oy) donne $a = -d$ d'où $bc = -a^2$.

On obtient $A = \begin{pmatrix} a & -ka \\ a/k & -a \end{pmatrix}$ qui est nilpotente (son unique v.p. est 0).

B4) On reprend le système (S) , qui donne immédiatement $\lambda = \frac{a+d}{2}$ et $\alpha = b - c$. La dernière condition (déterminant) est alors vérifiée par duplicité de la valeur propre.

α est l'ordonnée du symétrique de l'origine par rapport au centre du cercle (ou du rectangle).

B5) C'est exactement ce que l'on lit sur la matrice précédente : après changement de BON directe on a la somme de l'homothétie de rapport λ et de... cette chose (composée d'une projection et d'une rotation de $\pi/2$).

C1) La condition est donc que A n'ait pas de valeurs propres (réelles), ce qui advient quand $(a - d)^2 + 4bc < 0$. A n'est donc ni diagonalisable ni trigonalisable.

C2) K a pour coordonnées $(\frac{a+d}{2}, 0)$. Le calcul le plus simple de U me semble être d'arguer que le triangle $(KU\Omega)$ est rectangle (la tangente à un cercle est orthogonale au rayon) et donc que U appartient au cercle de

diamètre (KΩ), qui a pour équation

$$\left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b-c}{4}\right)^2 = \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{(b-c)y}{2} = 0$$

En combinant avec l'équation du cercle, soit

$$\left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{(b-c)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

il reste par différence

$$-y \frac{b-c}{2} + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \iff y = \frac{(a-d)^2 + 4bc}{2(c-b)}$$

On peut en tirer la valeur de x (deux solutions symétriques autour de $\frac{a+d}{2}$) si nécessaire.

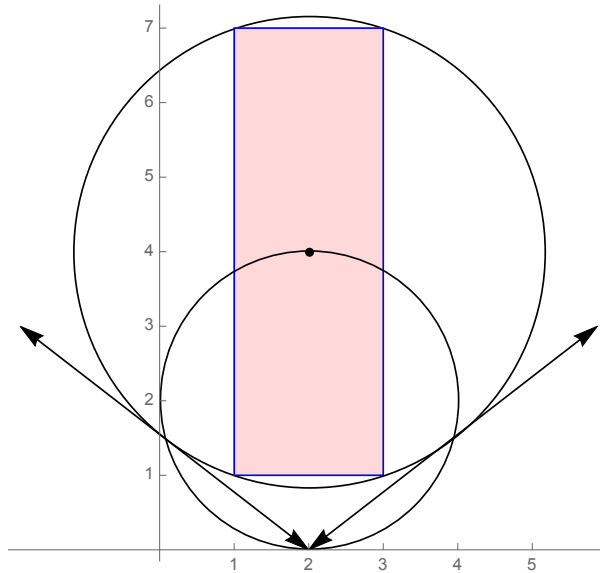


FIGURE 2. la construction précédente

C3) Les valeurs propres – complexes et conjuguées – de A vérifient $\lambda + \bar{\lambda} = a + d$ et on en tire $\text{Re}(\lambda) = \frac{a+d}{2}$ alias l'abscisse de K.

De plus, la distance KU se calcule fort simplement grâce à la construction précédente via le théorème de Pythagore :

$$KU^2 = K\Omega^2 - \Omega U^2 = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right) = -\frac{1}{4}((a-d)^2 + 4bc) = -\frac{1}{4}\Delta_A = \frac{1}{4} \text{Im}(\lambda)^2$$

où Δ_A est le discriminant de l'équation caractéristique dont les racines sont $\lambda, \bar{\lambda}$.

On a trouvé $\text{Im}(\lambda) = \pm 2 KU$, les deux vp conjuguées sont bien déterminées.

D1) $E = (d, -c) = (\alpha + |\beta|, \beta)$ avec $(\alpha, \beta) = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{b-c}{2}\right)$ d'où $\beta = \frac{b-c}{2}$ et $\alpha = d - \left|\frac{b-c}{2}\right|$. Notons que $H = (a, -c) = (\alpha - |\beta|, \beta)$: (EH) est un diamètre du cercle, $b = -c = \beta$ donc B = A convient et je ne comprends pas bien la question !

La condition $r = |\beta|$ se traduit par

$$r^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \beta^2 = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

ce qui donne (le calcul devient répétitif!) $\Delta_A = (a-d)^2 + 4bc = 0$: on est dans la situation de valeur propre double, i.e. du cercle tangent à l'axe des abscisses (cela se voyait sur la définition de Ω, r).

Cette valeur propre est nécessairement $\frac{a+d}{2} = \alpha$. On a en fait sans changement de base

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - |\beta| & \beta \\ -\beta & \alpha + |\beta| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} - |\beta|K_2$$

Par rapport à **III E3**) on a changé β en $-\beta$, et $\gamma = -|\beta|$ ce qui bouleverse les conventions prises. *Mutatis mutandis* on retrouve néanmoins les valeurs $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\ell = |\beta|$, t et $t' = \pi$.

D2) Ici le cercle s'envole au dessus de l'axe des x , on a deux valeurs propres imaginaires conjuguées. $a + d = 0$ et $b - c = 2\alpha = 4r$. On peut calculer λ par la construction géométrique : c'est un imaginaire pur de module $KU = \alpha\sqrt{3}/2$ i.e. $\lambda = \pm i\alpha\sqrt{3}/2$.

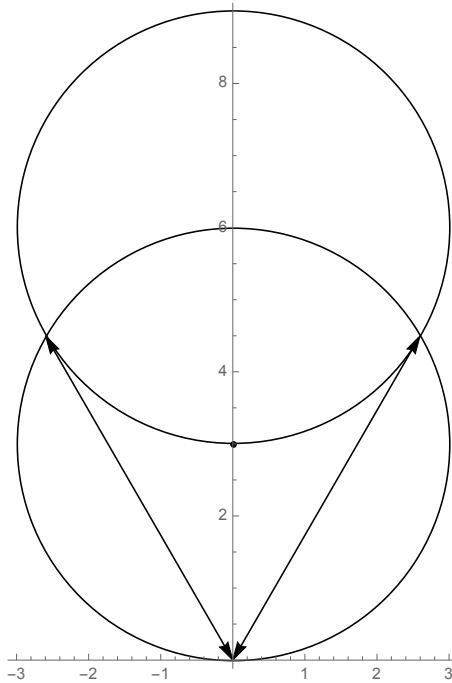


FIGURE 3. cas **D2**), $\alpha = 6$

On peut prendre $B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix}$ avec les formules de **III E3**), sachant que (conservation du det) $\beta^2 - \gamma^2 = -\frac{3}{4}\alpha^2$. De plus par conservation de $b - c$ on a $-2\beta = 2\alpha$, $\beta = -\alpha$ et finalement $\gamma = \alpha/2$.

5. Quadrique propre

Ceci est maintenant hors-programme.

A)
$$\begin{aligned} \psi_A(x, y, z) &= \operatorname{Re}((a - x - iz)(d - x - iz) - (b - y)(c + y)) \\ &= (a - x)(d - x) - (b - y)(c + y) - z^2 \\ &= x^2 + y^2 - z^2 - x(a + d) + y(-b + c) + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c-b}{2}\right)^2 - z^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + ad - bc. \end{aligned}$$

On reconnaît en \mathcal{H}_A un hyperboloïde à une nappe.

B) L'intersection avec $(z = 0)$ est un cercle, déjà étudié !

L'intersection avec le plan vertical $(x = \frac{a+d}{2})$ donne une hyperbole (équilatère) :

$$\left(y - \frac{c-b}{2}\right)^2 - z^2 = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2.$$

C1) Le déterminant vaut 0 (et en particulier sa partie réelle) quand $x + iz$ est valeur propre de A avec $y = 0$. L'intersection de \mathcal{H}_A et de $(y = 0)$ donne une hyperbole. Les valeurs propres étant conjuguées, leur partie réelle est connue, c'est $\frac{a+b}{2}$, la moitié de la trace.

On coupe donc cette hyperbole par $x = \frac{a+b}{2}$,

$$\left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - z^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc$$

et on trouve $z = \pm \sqrt{-bc - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2}$.

Les deux points trouvés sont les sommets de l'hyperbole ! [intersection avec un axe de symétrie] Les vecteurs $x \pm iz$ dans ce plan sont les valeurs propres demandées.

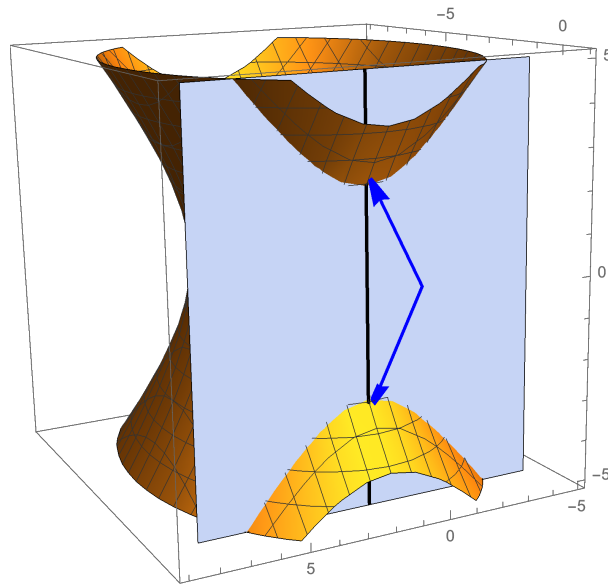


FIGURE 4. Le dessin demandé