

# Corrigé mines math 1 2021

M.SAADAOU

## Résultats préliminaires

1.  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$ , donc  $\varepsilon_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

On a donc  $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} (1 + \varepsilon_n)$ .

2. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leq \lambda x + \mu$  ce qui donne que  $x + \frac{\mu - 1}{\lambda} < \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda} \leq x + \frac{\mu}{\lambda}$   
 par passage à la limite, on a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda} = x \neq 0$

Donc  $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x$ . De même pour  $\lceil \lambda x + \mu \rceil$ .

3.  $\Phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$  et  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\Phi$  l'est aussi.

4.  $\zeta(x) = (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ .

## Étude asymptotique d'une suite

5.  $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$ , donc  $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} \leq 1$  si et seulement si

$np - q \leq k$ . On a  $x_n = \lceil np - q \rceil$ , donc pour  $k \geq x_n$ , la suite  $(P(X = k))_{k \geq x_n}$  est décroissante et la suite  $(P(X = k))_{k \leq x_n}$  est croissante. Par suite

$$\max_{0 \leq k \leq n} (P(X = k)) = P(X = x_n).$$

6. On a  $x_n - 1 < np - q \leq x_n$ , la deuxième inégalité entraîne que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

$n - x_n \geq n - np + q = (1-p)n + q \rightarrow +\infty$  (puisque  $p < 1$ ).

$$\begin{aligned} \sqrt{npq} p_n &= \sqrt{npq} P(X_n = x_n) = \sqrt{npq} \frac{n!}{x_n! (n-x_n)!} p^{x_n} q^{n-x_n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{x_n}{e}\right)^{x_n} \sqrt{2\pi x_n} \left(\frac{n-x_n}{e}\right)^{n-x_n} \sqrt{2\pi (n-x_n)}} p^{x_n} q^{n-x_n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} \sqrt{2\pi x_n} (n-x_n)^{n-x_n} \sqrt{2\pi (n-x_n)}} \end{aligned}$$

D'autre part  $x_n \underset{+\infty}{\sim} np$  et  $\frac{n-x_n}{n} = 1 - \frac{x_n}{n} \rightarrow 1 - p = q \neq 0$ , donc  $n - x_n \underset{+\infty}{\sim} qn$ . On a alors

$$\sqrt{npq} p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} \sqrt{2\pi x_n} (n-x_n)^{n-x_n} \sqrt{2\pi (n-x_n)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} \sqrt{2\pi np} (n-x_n)^{n-x_n} \sqrt{2\pi qn}}$$

Donc

$$\sqrt{npq} p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}}$$

7. Pour  $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$ , on a  $\frac{x_n - np}{np} > -1$  et  $\frac{np - x_n}{nq} > -1$ , donc  $\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right)$  et  $\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)$  ont un sens.

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -np\left(1 + \frac{x_n - np}{np}\right) \ln\left(1 + \frac{x_n - np}{np}\right) = x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right) = \ln\left(\frac{x_n}{np}\right)^{x_n}$$

Donc  $e^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right)} = \left(\frac{x_n}{np}\right)^{x_n}$ .

$$\begin{aligned} -nq\zeta\left(1 + \frac{np - x_n}{nq}\right) &= -nq\left(\frac{(p+q)n - x_n}{nq}\right) \ln\left(\frac{(p+q)n - x_n}{nq}\right) \\ &= -(n - x_n) \ln\left(\frac{n - x_n}{np}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n - x_n}{np}\right)^{x_n - n}\right) \end{aligned}$$

Donc  $e^{-nq\zeta\left(1 + \frac{np - x_n}{nq}\right)} = \left(\frac{n - x_n}{np}\right)^{x_n - n}$ . Il suffit de maintenant de faire le produit.

8. De la définition de la suite  $(x_n)_n$  découle l'encadrement  $-1 < \frac{-q}{np} \leq \frac{x_n - np}{np} < \frac{1 - q}{np}$ , donc  $\frac{x_n - np}{np} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui donne par la question 4. du préliminaire que :

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -np\left[\frac{x_n - np}{np} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_n - np}{np}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x_n - np}{np}\right)^2\right)\right]$$

La suite  $(x_n - np)_n$  est bornée, donc

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -x_n + np + o(1)$$

De même  $-nq\zeta\left(\frac{x_n - np}{nq}\right) = -x_n + np + o(1)$ . Donc

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - -nq\zeta\left(\frac{x_n - np}{nq}\right) = o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

A l'aide des questions 6. et 7. précédentes, on a  $\sqrt{npq}p_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

## Convergence en loi

- On a  $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ , donc  $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k}; 0 \leq k \leq n\}$ , de plus  $P(Y_n = \tau_{n,k}) = P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

-  $Y_n(\Omega)$  est fini, donc  $Y_n$  admet une espérance et une variance. Par linéarité, on a  $E(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}}(E(X_n) - np) = 0$  ( $X_n$  suit loi binômiale) et  $\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{npq}V(X_n) = 1$ .  $Y_n$  est donc centrée et réduite.

9. On a  $\tau_{n,0} = \frac{-np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}}$ ,  $\tau_{n,n} = \frac{\sqrt{nq}}{\sqrt{pq}} = \sqrt{\frac{nq}{p}}$ . Il suffit de choisir  $N$  tel que  $\sqrt{N} \geq \max\left(\frac{1}{(b-a)\sqrt{pq}}, \frac{b\sqrt{p}}{\sqrt{q}}, \frac{|a|\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right)$ , un tel entier existe puisque  $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ . Pour  $n \geq N$ , on a  $\sqrt{n} \geq \frac{1}{(b-a)\sqrt{pq}}$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b-a$ , donc  $b \leq \sqrt{\frac{nq}{p}} = \tau_{n,n}$  et  $\frac{|a|\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{n}$  donc  $-\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{n}$ , ce qui donne que  $-\sqrt{\frac{np}{q}} = \tau_{n,0} \leq a$ .

10.  $k_n(t) = k$  si et seulement si  $\lfloor \sqrt{npqt} + np \rfloor = k$  ce qui est équivalent à  $k \leq \sqrt{npqt} + np < k + 1$   
ou encore à  $\frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \tau_{n,k} \leq t < \frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}} = \tau_{n,k+1}$

Donc  $k_n(t) = k$  pour  $\tau_{n,k} \leq t < \tau_{n,k+1}$ , la fonction  $k_n$  est donc en escalier.

Pour  $\tau_{n,k} \leq t < \tau_{n,k+1}$ ,  $e_n(t) = \tau_{n,k}$  donc  $e_n$  est en escalier.

Soient  $t, t'$  avec  $t \leq t'$ , alors  $k_n(t) \leq k_n(t')$  ( $t \mapsto \lfloor t \rfloor$  est croissante), donc  $e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)} = \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_n(t') - np}{\sqrt{npq}} = e_n(t')$ . D'où la croissance de  $e_n$ .

On a  $k_n(t) \leq \sqrt{npqt} + np < k_n(t) + 1$  donc  $e_n(t) = \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$ .

D'après l'inégalité précédente,  $0 \leq t - e_n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc la suite  $(e_n)_n$  est simplement convergente vers  $t \mapsto t$ .

11. D'après la question précédente  $\tau_{n,k_n(a)} = \frac{k_n(a) - np}{\sqrt{npq}} = e_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et  $\tau_{n,k_n(b)+1} = \frac{k_n(b) + 1 - np}{\sqrt{npq}} =$

$e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$  et  $F : x \mapsto \int_0^x \Phi(t) dt$  est continue

Donc  $\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt = F(\tau_{n,k_n(b)+1}) - F(\tau_{n,k_n(a)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = \int_a^b \Phi(t) dt$ .

On a  $\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_k^{k+1} f_n(t) dt = \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = e_n(t)) dt$

Pour  $\tau_{n,k} < t < \tau_{n,k+1}$ , on a  $e_n(t) = \tau_{n,k+1}$  donc

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = e_n(t)) dt &= \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = \tau_{n,k+1}) dt = (\tau_{n,k+1} - \tau_{n,k}) P(Y_n = \tau_{n,k+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{npq}} P(Y_n = \tau_{n,k+1}) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} (\tau_{n,k+1} - \tau_{n,k}) P(Y_n = \tau_{n,k+1}) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} P(Y_n = \tau_{n,k+1})$$

D'où l'égalité

$$\int_{\tau_n, \tau_n(a)}^{\tau_n, \tau_n(b)+1} f_n(t) dt = P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b))$$

12. On a  $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} P(Y_n = e_n(\tau_{n,k})) = \sqrt{npq} P\left(Y_n = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) = \sqrt{npq} P(X_n = k)$

Donc  $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sqrt{npq} \frac{n!}{k!((n-k)!)} p^k q^{n-k}$ . Puis par le résultat du préliminaire, on a

$$\begin{aligned} f_n(\tau_{n,k}) &= \sqrt{npq} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} (1 + \varepsilon_n)}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi} (1 + \varepsilon_k) \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2(n-k)\pi} (1 + \varepsilon_{n-k})} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 + \varepsilon_k)(1 + \varepsilon_{n-k})} \end{aligned}$$

13. D'après le préliminaire, on a  $k_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} np$ , donc  $k_n(t) = np + o(n)$ .

On a donc  $n - k_n(t) = (1 - p)n + o(n) = qn + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} qn$ . Ce qui donne que  $\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

$$\frac{pqn^2}{pqn^2} = 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} = 1.$$

On a  $k_n(t) \rightarrow +\infty$  et  $n - k_n(t) \rightarrow 0$  donc  $\varepsilon_{k_n(t)} \rightarrow 0$  et  $\varepsilon_{n - k_n(t)} \rightarrow 0$  (comme suites extraites de  $(\varepsilon_n)$  qui tend vers 0), et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 + \varepsilon_{k_n(t)})(1 + \varepsilon_{n - k_n(t)})} = 1$ .

14. Pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tel que  $\max \left\{ \sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}} \right\} |\tau_{n,k}| < 1$ , on a  $-1 < \sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k} < 1$  et  $-1 < \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k}$ , donc il est légitime de calculer  $\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right)$  et  $\zeta \left( -\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k} \right)$ .

$$\text{Maintenant on a } -np\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) = -np \left( 1 + \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right)$$

$$\left( 1 + \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) = \left( 1 + \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \sqrt{\frac{q}{np}} \right) = \left( 1 + \frac{k - np}{np} \right) = \frac{k}{np}$$

$$\text{Donc } np\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) = k \ln \left( \frac{k}{np} \right) = \ln \left( \frac{k}{np} \right)^k$$

$$\text{De même } \left( 1 - \sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k} \right) = \left( 1 - \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) = \left( 1 - \frac{k - np}{nq} \right) = \left( \frac{(p + q)n - k}{nq} \right) = \frac{n - k}{nq}$$

$$\text{Donc } -nq\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) = -nq \left( \frac{n - k}{nq} \right) \ln \left( \frac{n - k}{nq} \right) = (k - n) \ln \left( \frac{n - k}{nq} \right)$$

$$\text{Ce qui donne que } -nq\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) = \ln \left( \frac{n - k}{nq} \right)^{\frac{k - n}{nq}}$$

On a donc

$$e^{-np\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right) - nq\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} \right)} = \left( \frac{k}{np} \right)^{-k} \left( \frac{n - k}{nq} \right)^{\frac{k - n}{nq}} = \frac{p^k q^{n - k}}{\left( \frac{k}{n} \right)^k \left( \frac{n - k}{k} \right)^{n - k}}.$$

15. Posons  $\Delta_n(t) = \frac{p^{k_n(t)} q^{n - k_n(t)}}{\left( \frac{k_n(t)}{n} \right)^{k_n(t)} \left( \frac{n - k_n(t)}{k_n(t)} \right)^{n - k_n(t)}}$

$$\text{On a } \Delta_n(t) = \exp \left[ -np\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)} \right) - nq\zeta \left( \sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k_n(t)} \right) \right]$$

Je cherche à utiliser de le DL de  $\zeta$ , pour cela on a besoin de justifier que  $\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)} \rightarrow 0$

et de même  $\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k_n(t)} \rightarrow 0$ . On a  $k_n(t) \leq \sqrt{npqt} + np < k_n(t) + 1$  donc  $\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)} =$

$$\sqrt{\frac{q}{np}} \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0. \text{ De même pour la deuxième.}$$

bornée

Maintenant à l'aide de développement limite de  $\zeta$ , on a :

$$\begin{aligned} -np\zeta \left( \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)} \right) &= -np \left[ \sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{2} \frac{q}{np} (\tau_{n,k_n(t)})^2 + O \left( \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= -np \left[ \sqrt{\frac{q}{np}} \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2} \frac{q}{np} (\tau_{n,k_n(t)})^2 + O \left( \frac{1}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même} \quad -nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right) &= -nq\left[-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{2}\frac{p}{nq}(\tau_{n,k_n(t)})^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= -nq\left[-\sqrt{\frac{p}{nq}}\frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2}\frac{p}{nq}(\tau_{n,k_n(t)})^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ln \Delta_n(t) = -\frac{1}{2}(p+q)(\tau_{n,k_n(t)})^2 + o(1) = -\frac{1}{2}(e_n(t))^2 + o(1)$$

$$\text{Puis à l'aide de la question 11, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \Delta_n(t) = -\frac{t^2}{2}$$

$$\text{Par suite } \frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\binom{k_n(t)}{n} \binom{n-k_n(t)}{k_n(t)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$$16. - f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(Y_n = \tau_{n,k_n(t)}) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t))$$

$$\text{Donc } f_n(t) = \sqrt{npq} \frac{n!}{k_n(t)!(n-k_n(t))!} p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}$$

$$\text{Donc } f_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{npq} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}{\left(\frac{k_n(t)}{e}\right)^{k_n(t)} \sqrt{2\pi k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{e}\right)^{n-k_n(t)} \sqrt{2\pi(n-k_n(t))}} p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}$$

$$\text{D'après la question 16, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\binom{k_n(t)}{n} \binom{n-k_n(t)}{n}} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\text{D'autre part on a } k_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} np \text{ et que } n-k_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} qn, \text{ donc } \frac{\sqrt{npq}\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2\pi k_n(t)}\sqrt{2\pi(n-k_n(t))}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{npq}\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2\pi np}\sqrt{2\pi qn}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \Phi(t)$$

17. - On a  $f_n(t) \rightarrow \Phi(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ , reste à donner une domination pour intervertir la limite et l'intégrale.

On  $f_n(t) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leq \sqrt{npq}p_n$  (d'après la question 5. du préliminaire puisque  $p_n = \max P(X_n = k)$ ). D'autre part la suite  $\sqrt{npq}$  est convergente (d'après le préliminaire) et donc elle est majorée. Soit  $C$  un majorant de la suite  $(\sqrt{npq}p_n)_n$

On a donc  $0 \leq f_n(t) \leq C$  pour tout  $t \in [a, b]$  et  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $\Phi$ . Donc d'après le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \Phi(t) dt$$

$$18. - \text{On a } P(e_n(a) \leq Y \leq e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt \text{ où } g_n(t) = f_n(t) \chi_{I_n}$$

où  $\chi_{I_n}$  désigne la fonction indicatrice de  $I_n = [\tau_{n,k_n(a)}, \tau_{n,k_n(b)+1}]$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{n,k_n(a)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(a) = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{n,k_n(b)+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{n,k_n(b)+1} = b$ , donc  $g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0$  pour  $t \notin [a, b]$  et  $g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \Phi(t)$  pour  $t \in [a, b]$ . De plus  $0 \leq g_n(t) \leq \Phi(t)$ , avec  $\Phi$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de la convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(e_n(a) \leq Y \leq e_n(b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_a^b \Phi(t) dt.$$

- On a  $e_n(a) \leq a \leq e_n(b) \leq b$ , on a

$$P(a \leq Y_n \leq b) = P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) + P(e_n(b) \leq Y_n \leq b) - P(e_n(a) \leq Y_n \leq a)$$

On a  $P(e_n(b) \leq Y_n \leq b) = P\left(e_n(b) \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right)$   
 $= P(\sqrt{npq}e_n(b) + np \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np) = P(k_n(b) \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np)$  et comme  $X_n$   
est à valeurs entières, donc

$$P(k_n(b) \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np) = P(X_n = k_n(b)) \leq p_n$$

Par le résultat de **8**, on a  $p_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \rightarrow 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(e_n(b) \leq Y_n \leq b) = 0$  puis de  
façon analogue  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(e_n(a) \leq Y_n \leq a) = 0$ . En passant à la limite dans l'égalité du départ,

on a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Y_n \leq b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_a^b \Phi(t) dt$ .

## Applications

19. D'après la question **18**, on a  $P(a < Y_n < b) = P(a \leq Y_n \leq b)$

Pour tout  $T > 0$ , on a  $P(-T \leq Y_n \leq T) = P(-T < Y_n < T) = P(|Y_n| < T) = 1 - P(|Y_n| \geq T)$

On a  $E(Y_n) = 0$  et  $Var(Y_n) = 1$ , donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|Y_n| \geq T) \leq \frac{1}{T^2}$$

Ce qui donne que  $P(-T \leq Y_n \leq T) \geq 1 - \frac{1}{T^2}$ , puis on passe à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a

alors, à l'aide de la question **18**,  $\int_{-T}^T \Phi(t) dt \geq 1 - \frac{1}{T^2}$ .

$$\int_{-T}^T \Phi(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(-T \leq Y_n \leq T) \text{ donc } \int_{-T}^T \Phi(t) dt \leq 1.$$

On a donc pour tout  $T > 0$ ,  $1 - \frac{1}{T^2} \leq \int_{-T}^T \Phi(t) dt \leq 1$ , on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = 1.$$

20. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(e_{n,0} \leq Y_n \leq e_n(b)) = P(-\infty \leq Y_n \leq b) = P(Y_n \leq b)$ .

D'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(e_{n,0} \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq b) = \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$$

On a  $P(Y_n \geq a) = 1 - P(Y_n \leq a) \rightarrow 1 - \int_{-\infty}^a \Phi(t) dt = \int_a^{+\infty} \Phi(t) dt$ .

## Généralisation

21. -  $\varphi'$  est continue ne s'annule pas, donc garde un signe constant par suite  $\varphi$  est strictement  
montone. Si  $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , alors  $\varphi$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur lui-même

Si  $\varphi' > 0$  alors  $\varphi$  est strictement croissante, dans ce cas

$$P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = P(\varphi^{-1}(\alpha) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\beta)) \rightarrow \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t) dt$$

Puis par le théorème de changement de variable, on a

$$P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Phi(\varphi^{-1}(u))}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)} du = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(u) du$$

Où  $\Psi(u) = \frac{\Phi(\varphi^{-1}(u))}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)}$

Si  $\varphi$  est décroissante,  $P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = P(\varphi^{-1}(\beta) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\alpha)) \rightarrow \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{\varphi^{-1}(\alpha)} \Phi(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi_1(u) du$  où les mêmes calculs sauf que  $\Psi_1(u) = -\frac{\Phi(\varphi^{-1}(u))}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)}$ .