

EXERCICE I

X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} d'espérance finie.

Q1 . Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Solution:

- On a $(X > k - 1) = (X = k) \cup (X > k)$ et $(X = k) \cap (X > k) = \emptyset$ donc $P(X > k - 1) = P(X = k) + P(X > k)$ et finalement,

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k - 1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(X > k - 1) - \sum_{k=1}^n kP(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=0}^n kP(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) \end{aligned}$$

- Il s'agit en fait de montrer qu'on a $nP(X > n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Or, comme X est d'espérance finie, on a convergence de $\sum kP(X = k)$ et donc convergence de son reste vers 0. De plus, $nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$ donc

$$0 \leq nP(X > n) \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)}_{\rightarrow 0}$$

Par théorème d'encadrement, on a $nP(X > n) \rightarrow 0$.

Q2 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel k , $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X .

Solution: Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note X_i le résultat du i ème tirage. Comme les tirages sont successifs avec remise, X_1, \dots, X_p sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $k \in \mathbb{N}$:

- Si $k \geq n$, on a $P(X \leq k) = 1$.
- Si $k = 0$, on a $P(X \leq k) = 0$.

- Si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(X \leq k) = P(\cap_{i=1}^p (X_i \leq k)) = \prod_{i=1}^p P(X_i \leq k)$ par indépendance de X_1, X_2, \dots, X_p . Finalement,

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

En raisonnant comme dans la question 1, on obtient, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} P(X = k) &= 0 \text{ si } k = 0 \text{ ou } k > n \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \text{ si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

- Q3 . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la Q1., déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Solution: On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $f : x \in [0, 1] \mapsto x^p$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et ainsi d'espérance finie.

On a donc, par la question 1, $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ et même $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.

Cela donne $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - P(X \leq k)) = n(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k))$.

Or, selon la limite précédente, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k) \rightarrow \frac{1}{p+1}$ donc $1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k) \rightarrow \frac{p}{p+1}$ et finalement,

$$E(X) \sim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{p}{p+1}$$

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I .

- Q4 . Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Solution: Sur I , on a (H) : $y'' + \frac{4}{x}y'(x) + \frac{2-x^2}{x^2}y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène et normalisée. Par corollaire du théorème de CAUCHY linéaire, $S_I(H)$ est de dimension 2.

Q5 . Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur \mathbb{R} .
Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\text{ch } x - 1}{x^2}$.

Solution:

- Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait qu'alors f est deux fois dérivable et qu'on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Si f est solution de (E) , alors pour tout $x \in I$, $x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) = 1$. Or, pour $x \in I$, on a $x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$ ie

$$x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2})}_{(n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}} x^n + 6a_1 x + 2a_0$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on a

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} a_n \end{cases}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$.

Pour $x \in I$, on a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= \frac{1}{x^2} (\text{ch}(x) - 1) \end{aligned}$$

On a prouvé l'unicité de f sous réserve d'existence.

- Réciproquement, la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ a bien un rayon de convergence infini et selon les calculs faits juste avant, $x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ est bien solution de (E) sur I .

On a bien montré l'existence et l'unicité d'une solution f de (E) sur I développable en série entière sur \mathbb{R} et obtenu que pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2} (\text{ch}(x) - 1)$.

Q6 . On note pour $x \in I$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\text{sh } x}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Solution:

- On a $f - g$ solution de (H) sur I .

- Montrons que $(f - g, h)$ est une famille libre de \mathbb{R}^I . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a(f - g) + bh = 0$. Alors, pour tout $x > 0$, $a \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + b \frac{\text{sh}(x)}{x^2} = 0$ c'est-à-dire, $a \text{ch}(x) + b \text{sh}(x) = 0$. En faisant $x \rightarrow 0$, on obtient $a = 0$ puis $b = 0$.
- $(f - g, h)$ est une famille libre de $S_I(H)$ qui est de dimension 2 : c'est donc une base de $S_I(H)$.
- g est une solution de $S_I(E)$ donc, d'après le cours,

$$S_I(E) = \{a(f - g) + bh + g, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Q7 . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur \mathbb{R}) ?

Solution:

- En raisonnant comme sur \mathbb{R}_+^* , on obtient $S_{\mathbb{R}_+^*}(H) = \{x < 0 \mapsto c \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + d \frac{\text{sh}(x)}{x^2}, (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Soit $\phi \in S_{\mathbb{R}}(H)$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall x > 0, \phi(x) = a \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + b \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$$

et

$$\forall x < 0, \phi(x) = c \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + d \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, on a $a \text{ch}(x) + b \text{sh}(x) \rightarrow a$ donc si $a \neq 0$, ϕ n'a pas de limite finie en 0^+ ce qui n'est pas possible puisque ϕ est continue en 0. De même, $c = 0$.

Puis, comme, au voisinage de 0, $\frac{\text{sh}(x)}{x^2} \sim \frac{1}{x}$, de même, pour que ϕ ait une limite finie en 0, il est nécessaire d'avoir $b = d = 0$.

Finalement, $\phi = 0$.

Réciproquement, cette fonction convient.

On a

$$\dim S_{\mathbb{R}}(H) = 0$$

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q8 . Question préliminaire

Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Solution: On sait déjà que la famille $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable (puisque que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs). On note S sa somme.

On a donc, par sommation par paquets $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$. D'où $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S$ soit

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I

Q9 . On note, pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n .

En déduire, pour tout entier naturel n , que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Solution:

- $x \mapsto \sin^{n+1} x$ est dérivable par composée de fonctions dérivables et sa dérivée est $x \mapsto (n+1) \cos x \sin^n x$.
- On fait une intégration par parties dans W_{n+2} :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \sin t dt \\ &= [\sin^{n+1}(t)(-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^n t \cos t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Finalement,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

- On peut le vérifier en raisonnant par récurrence sur n .
 - On a $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$ d'une part et d'autre part, $\frac{2^0 0!^2}{1!} = 1$. La formule est validée au rang 0.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Alors

$$\begin{aligned} W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

ce qui valide la formule au rang $n+1$.

Q10 . Déterminer sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \text{Arcsin } x$.

Solution:

- Soit $x \in]-1, 1[$. D'après le cours

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n! 2.4\dots(2n)} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \end{aligned}$$

- Par primitivation, on obtient que Arcsin est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et, comme $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a pour $x \in] - 1, 1[$,

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

Q11 . En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Solution: Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On a $x = \text{Arcsin}(\sin x)$. Comme $\sin x \in [0, 1[$, on a d'après la question précédente,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$$

Q12 . Justifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$.

Solution: Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme, pour cela, on note f_n : $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$ et $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto x$.

- D'après la question 11, $\sum f_n$ converge simplement vers f .
- Les f_n et f sont continues par morceaux.
- Les f_n sont intégrables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n|$ converge (car $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge)

On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$.

Q13 . En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution: Le calcul précédent donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'après la question 8,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II

Q14 . Donner sur l'intervalle $] - 1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Solution:

- Pour $x \in] - 1, 1[$, on a $x^2 \in [0, 1[$ donc $\frac{1}{x^2-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.
- On applique le théorème d'intégration terme à terme. Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in]0, 1[\mapsto -x^{2n} \ln x$ et $f : x \in]0, 1[\mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$.
 - $\sum f_n$ converge simplement vers f d'après le début de la question
 - les f_n et f sont continues par morceaux
 - les f_n sont intégrables : car, pour $n \geq 1$, sont continues et ont une limite finie en 0 et en 1 et $f_0 = -\ln$ est intégrable sur $]0, 1[$ car continue, a une limite finie en 1 et, en 0, $\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x > 0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable en 0. De plus, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = - \int_0^1 f_n(t) dt$. Notons-la I_n . Pour la calculer, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t^{2n+1}$ et $v(t) = \ln t$. Comme uv a une limite finie en 0 et en 1 (elles valent 0), on peut réaliser une intégration par parties et on a $\int_0^1 -t^{2n} \ln t dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
 - $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge car $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge

On conclut que f est intégrable sur $]0, 1[$ et qu'on a

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -t^{2n} \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Q15 . On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Solution: Notons $g : (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour $t > 0, x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(x, t)$ est continue
- Pour $x \in \mathbb{R}^+, t > 0 \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux)
- Domination : soit $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$ et $\phi : t > 0 \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

On conclut que f est continue sur \mathbb{R}^+ .

Q16 . Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Solution: On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- Pour $t > 0, x \in]0, 1] \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 et pour $(x, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2}$.
- Pour $x \in]0, 1], t > 0 \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable (fait dans la question précédente)
- Pour $x \in]0, 1], t > 0 \mapsto \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux)
- Domination : soit $]a, 1] \subset]0, 1], (x, t) \in]a, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \frac{t}{1+a^2t^2} \frac{1}{1+t^2}$ et $\psi : t > 0 \mapsto \frac{t}{1+a^2t^2} \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* : en effet, ψ a une limite finie en 0 et en $+\infty$, $\psi(t) \sim \frac{1}{a^2t^3}$ qui est intégrable en $+\infty$.

On conclut que f est de classe C^1 sur $]0, 1]$ et qu'on a pour $x \in]0, 1]$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

Q17 . Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Solution:

- $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$
- Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2x^2) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(1-x^2)} \left[\ln \frac{1+t^2}{1+t^2x^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2-1} \ln x \end{aligned}$$

Q18 . Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution:

- Calculons $f(1)$. On a $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt$. On réalise une intégration par parties avec $u = v = \text{Arctan}$: le produit uv , a une limite finie en 0 et en $+\infty$. L'intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}^2(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt$$

et ainsi, $f(1) = \frac{\pi^2}{8}$.

- Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$, on a $\int_{\varepsilon}^1 f'(t) dt = f(1) - f(\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = f(1) - f(0) = f(1)$. Ainsi, $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On retrouve à nouveau qu'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN