

I - Étude préliminaire

I.A - Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Pour tout $x \in [k-1, k] \subset [a, +\infty[$, $f(x+1) \leq f(k) \leq f(x)$ par décroissance de f donc $\int_{k-1}^k f(x+1) dx \leq \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$, soit, en effectuant le changement de variable $t = x + 1$ dans la première intégrale, $\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$.

I.A.2) Si $\alpha > 1$, on a donc, en appliquant ce qui précède à $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui est bien continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée: elle est donc convergente.

Si $\alpha \leq 1$, on a donc, en appliquant [1] $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3) La majoration a été vue au [2], la minoration est immédiate donc $\forall \alpha > 0, 1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

I.B - Première étude asymptotique du reste

I.B.1) Pour $\alpha < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et on déduit de [A.1] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

$$\text{donc } 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

$$\text{Or } \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1 \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.$$

$$\text{Donc } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

I.B.2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre $k \in \mathbb{N}^*$ et $k+1$ s'écrit

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2}f''(k) + \frac{1}{2} \int_0^1 f^{(3)}(k+t)(1-t)^2 dt.$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) = \frac{1}{t^\alpha}, f''(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}, f'''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On a donc

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(k+t)^{\alpha+2}} dt = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

$$\text{avec } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_0^1 \frac{1}{k^{\alpha+2}} dt.$$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) On peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme $\frac{1}{k^\alpha} = f(k) - f(k+1) + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k$ avec $A_k = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$. La série $\sum_{k \geq 1} (f(k) - f(k+1))$ est une série télescopique qui converge puisque $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ sont des séries de Riemann convergentes. On a donc, par linéarité de la somme, $R_n(\alpha) = f(n) + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k$. Or, par sommation de relation de comparaison pour des séries convergentes, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} A_k = O(R_n(\alpha+2))$. D'autre part, [1] donne $R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $R_n(\alpha+2) = \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. Finalement, $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A - Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrons, par récurrence sur $p \geq 1$, qu'il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\exists (b_{1,p}, \dots, b_{p-1,p}) \in \mathbb{R}^{p-1}, \quad \forall f \in C^\infty(I, \mathbb{C}), g = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)} \text{ vérifie } \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} g^{(j)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}.$$

Pour $p=1$, il suffit de prendre $a_0 = 1$, alors $g = f$ donc $g' = f'$ et l'égalité est vérifiée.

Pour $p=2$, prenons $a_1 = -\frac{1}{2}$. On a alors $g = f - \frac{1}{2}f'$ donc $g' + \frac{1}{2}g'' = f' - \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2}f'' - \frac{1}{4}f^{(3)} = f' - \frac{1}{4}f^{(3)}$ ce qui est l'égalité voulue.

Si le résultat est vrai jusqu'à p , prenons $a_p = -b_{1,p}$ et notons $g = \sum_{k=0}^p a_k f^{(k)} = h - b_{1,p}f^{(p)}$. L'hypothèse

de récurrence donne $\sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} h^{(j)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} h^{(j)} + \frac{1}{(p+1)!} h^{(p+1)} - b_{1,p} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} f^{(p+j)} \\ &= f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p a_k f^{(k+p+1)} - b_{1,p} f^{(p+1)} - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{b_{1,p}}{j!} f^{(p+j)} \\ &= f' + \sum_{l=2}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p a_k f^{(k+p+1)} - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{b_{1,p}}{j!} f^{(p+j)} \\ &= f' + \sum_{l=1}^p b_{l,p+1} f^{(l+p+1)} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

II.A.2) $\diamond$ Appliquons ce qui précède à $f : t \mapsto e^{xt}$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: on a alors $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k e^{xt}$ donc, pour $t = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{k+j} \right) = \sum_{i=1}^{2p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=i \\ 1 \leq j \leq p, 0 \leq k \leq p}} \frac{a_k}{j!} \right) x^i \\ &= a_0 x + \sum_{i=2}^p \left(\sum_{j=1}^i \frac{a_{i-j}}{j!} \right) x^i + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=l+p \\ 1 \leq j \leq p, 0 \leq k \leq p}} \frac{a_k}{j!} \right) x^{l+p} \end{aligned}$$

et

$$f'(0) + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}(0) = x + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} x^{l+p}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$, on obtient $a_0 = 1$ et $\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, \sum_{j=1}^i \frac{a_{i-j}}{j!} = 0$ donc $a_{i-1} = -\sum_{j=2}^i \frac{a_{i-j}}{j!}$. Ceci étant vrai pour tout p , on a bien obtenu $a_0 = 1$ et $\forall p \geq 1, a_p = -\sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!}$.

REMARQUE: on peut préférer utiliser $f : t \mapsto \frac{t^q}{q!}$ qui vérifie $f^{(k)}(0) = \delta_{k,q}$.

$\diamond$ Montrons $|a_p| \leq 1$ par récurrence sur p : c'est fait pour $p = 0$ et si c'est vrai jusqu'à $p - 1$, pour $p \geq 1$, on a, selon ci-dessus, $|a_p| = \left| \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!} \right| \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-j}|}{j!} \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{j!} \leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e - 2 < 1$. Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq 1$.

$\diamond$ La formule de récurrence donne facilement $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}$.

II.A.3) a) Pour $|z| \leq 1$, on a, d'après [1], $\forall p \in \mathbb{N}, |a_p z^p| \leq 1$ et donc la suite $(a_p z^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée. Le lemme d'Abel donne que le rayon de convergence de $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ est $R \geq 1$. Notamment, si $|z| < 1$, $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ converge.

b) $\diamond$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z - 1 = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^q}{q!}$ donc, par produit de Cauchy de séries entières sur l'intersection de leur disques ouverts de convergence, pour $|z| < 1$,

$$(e^z - 1)\varphi(z) = \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^q}{q!} \right) \times \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p z^p \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_{n-j}}{j!} \right) z^n = z \quad \text{selon [2]}$$

donc si $|z| < 1$, $(e^z - 1)\varphi(z) = z$.

$\diamond$ Or $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ donc si $0 < |z| < 1$, $e^z - 1 \neq 0$ et donc si $0 < |z| < 1$, $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

c) $\diamond$ On a donc, pour $0 < |z| < 1$, $\psi(z) = \varphi(z) + \frac{z}{2} = z \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = z \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \psi(-z)$ et, pour $|z| < 1$, $\psi(z) = a_0 + \sum_{p=2}^{\infty} a_p z^p$. Par unicité du développement en série entière de la restriction de ψ à $] -1, 1[$, la parité de ψ donne $\forall k \geq 1, a_{2k+1} = 0$.

$\diamond$ La formule de récurrence du [2] ou un développement limité de φ donne $a_4 = -\frac{1}{720}$.

II.B - Formule de Taylor

II.B.1) Si $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ alors f donc g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$ entre $k \in \mathbb{N}^*$ et $k+1$ pour g donne

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(k) + \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(k) + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 g^{(2p+1)}(k+t) (1-t)^2 dt \\ &= f'(k) + \sum_{l=1}^{2p} b_{l,2p} f^{(l+2p)}(k) + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i+2p+1)}(k+t) \right) (1-t)^2 dt. \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$ donc

$$\begin{aligned} |R(k)| &= \left| \sum_{n=2p+1}^{4p} b_{n-2p,2p} (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} + \int_0^1 \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1} (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha+n-2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}} \right] (1-t)^2 dt \right| \\ &\leq \sum_{n=2p+1}^{4p} |b_{n-2p,2p}| \frac{\alpha \cdots (\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 \left(\sum_{n=2p+1}^{4p} |a_{n-2p-1}| \frac{\alpha \cdots (\alpha+n-2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}} \right) (1-t)^2 dt \\ &\leq \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} \left(|b_{n-2p,2p}| + \frac{|a_{n-2p-1}|}{(2p)!} \right) \alpha \cdots (\alpha+n-2) \right] k^{-(2p+\alpha)} \end{aligned}$$

donc, p étant fixé, $\exists A \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, |R(k)| \leq A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2) ERREUR D'ÉNONCÉ: la formule donnée n'est pas vraie pour $p=1$ car elle s'écrirait $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ en désaccord avec le développement trouvé au [I.B.3].

D'après [1], on a $R(k) = O\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ et $2p+\alpha > 1$ donc la série $\sum_{k \geq 1} R(k)$ est convergente et on a, par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = O(R_n(2p+\alpha)) = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ selon [I.B.1].

Or $R(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{k^\alpha}$ avec $g(k) = \frac{a_0}{(1-\alpha)k^{\alpha-1}} + \sum_{i=1}^{2p-1} a_i (-1)^{i-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha+i-2)}{k^{\alpha+i-1}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc la série $\sum_{k \geq 1} (g(k+1) - g(k))$ converge et on a $\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) - R_n(\alpha)$ donc $R_n(\alpha) = -g(n) + \sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. De plus, pour $p \geq 1, a_3 = \dots = a_{2p-1} = 0$ selon [A.3]. Ceci donne $\forall p \geq 2, R_n(\alpha) = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \dots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$.

II.B.3) Pour $p=3$, il vient $R_n(\alpha) = -\left(\frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+5}}\right)$ soit, en particulier, $R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$.

III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A - Polynômes de Bernoulli

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) $\diamond$ Montrons l'existence et l'unicité de A_n par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, A_0 est donné directement donc il existe unique et c'est bien un polynôme. Et si A_n existe unique alors soit F la primitive de A_n qui s'annule en 0, F est un polynôme et

$$\left(A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0 \right) \iff \left(A_n = F + C \text{ (} C \text{ constante) et } C = - \int_0^1 F(t) dt \right)$$

donc la constante C existe unique et donc le polynôme A_n existe unique.

Ainsi les conditions [III.1] définissent une unique suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes sur $\mathbb{R}$.

◇ Montrons, par récurrence sur n , que $\deg(A_n) = n$: c'est clair pour $n = 0$, et si c'est vrai pour n , alors

$$A'_{n+1}(X) = A_n(X) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} X^k \text{ avec } c_n, n \neq 0 \text{ donc } A_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n,k}}{k+1} X^{k+1} + c_{n+1,0}.$$

$$\diamond \text{ On trouve facilement } A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{X^3}{6} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}, A_3 = \frac{X^2}{2} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}.$$

b) Posons $C_n(x) = (-1)^n A_n(1-x)$: C_n est une fonction polynôme et on a $C_0 = 1, \forall n \geq 1, C'_n(x) = (-1)^{n+1} A'_n(1-x) = (-1)^{n+1} A_{n-1}(1-x) = C_{n-1}(x)$ et $\int_0^1 C_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 A_n(1-t) dt \stackrel{u=1-t}{=} (-1)^n \int_0^1 A_n(u) du = 0$. Donc la suite (C_n) vérifie les conditions [III.1] et donc, par unicité, $\forall n, C_n = A_n$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, A_n(x) = (-1)^n A_n(1-x)$.

$$c) \diamond \text{ Pour } n \geq 2, A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t) dt = \int_0^1 A_{n-1}(t) dt = 0 \text{ donc } \forall n \geq 2, A_n(1) = A_n(0).$$

$$\diamond \text{ Selon [b], } A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(1-0) = -A_{2n-1}(0) \text{ d'après ci-dessus donc } \forall n \geq 2, A_{2n-1}(0) = 0.$$

$$d) \diamond \text{ Montrons, par récurrence sur } n, \text{ que } A_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}}{k!} X^k : \text{ c'est clair pour } n = 0, \text{ et si c'est}$$

$$\text{vrai pour } n, \text{ alors } A'_{n+1}(X) = A_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}}{k!} X^k \text{ donc } A_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}}{(k+1)!} X^{k+1} + c_{n+1} \text{ car}$$

$$c_{n+1} = A_{n+1}(0). \text{ Ceci donne bien } A_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{c_{n+1-k}}{k!} X^k.$$

$$\diamond \text{ L'égalité } A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0) \text{ donne alors } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n+1-k}}{k!} = 0 \text{ soit } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0.$$

$$e) \text{ On } c_0 = A_0(0) = 1 \text{ et, pour } n \geq 1, c_n = - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-k}}{k!} \text{ donc, suivant [II.A.2], et par récurrence}$$

immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

$$a) \text{ Pour } t \in [-1, 1], |A_n(t) z^n| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!} t^k \right| |z|^n \leq \left(\sum_{k=0}^n \frac{|a_{n-k}|}{k!} \right) |z|^n \leq \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) |z|^n \leq e |z|^n \text{ selon [II.A.2]. Or } \sum_{n \in \mathbb{N}} |z|^n \text{ converge si } |z| < 1 \text{ donc si } t \in [-1, 1] \text{ et } |z| < 1 \text{ alors } \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n(t) z^n \text{ converge.}$$

$$b) \diamond u_n : t \mapsto A_n(t) z^n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1] \text{ avec } u'_n(t) = \begin{cases} A_{n-1}(t) z^n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}, \text{ pour } z \text{ tel que } |z| < 1 \text{ fixé la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge simplement sur } [0, 1] \text{ selon [a] et } \forall n \geq 1, \|u'_n\|_{\infty}^{[0,1]} \leq e |z|^n \text{ donc } \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n \text{ converge normalement sur } [0, 1]. \text{ Le théorème de dérivation terme à terme permet de conclure et comme } \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}(t) z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n, t \mapsto f(t, z) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1] \text{ et } \forall t \in [0, 1], \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) = z f(t, z).$$

$$\diamond \text{ La fonction ci-dessus est donc solution de l'équation différentielle } y' = z y \text{ } \forall t \in [0, 1], f(t, z) = f(0, z) e^{zt}. \text{ Or } f(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \varphi(z) \text{ donc si } t \in [0, 1] \text{ et } 0 < |z| < 1 \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n = \frac{z e^{zt}}{e^z - 1}.$$

$$c) \diamond \text{ ERREUR D'ÉNONCÉ: lire } z \in \mathbb{C}^* \text{ et } |z| < 2\pi.$$

Pour $0 < |z| < 2\pi$, on a $e^z - 1 \neq 0$ et $\frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} + \frac{z}{e^z - 1} = z \frac{e^{z/2} + 1}{(e^{z/2} - 1)(e^{z/2} + 1)}$. On a donc bien si $0 < |z| < 2\pi$, $\frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} + \frac{z}{e^z - 1} = 2 \frac{z/2}{e^{z/2} - 1}$.

◇ Ainsi selon [b], pour $0 < |z| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{2}\right) z^n = \frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} = 2 \frac{z/2}{e^{z/2} - 1} - \frac{z}{e^z - 1} = 2\varphi\left(\frac{z}{2}\right) - \varphi(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Cette égalité est notamment vraie pour $z \in]0, 1[$ et aussi pour $z = 0$. par unicité du développement en série entière en 0, ceci donne $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) Montrons par récurrence sur p que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a les tableaux de variations suivants:

x	0	α_{2p-1}	1/2	β_{2p-1}	1
$A_{4p-2}(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	0	α_{2p}	1/2	β_{2p}	1
$A_{4p}(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$

x	0	α_{2p-1}	1/2	β_{2p-1}	1
$A_{4p-1}(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0

x	0	α_{2p}	1/2	β_{2p}	1
$A_{4p+1}(x)$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	0

Pour $p = 1$, le tableau de de variations de A_2 est bien comme indiqué avec $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, puis, comme $A'_3 = A_2$ et $A_3(1/2) = a_3 = 0$, le tableau de variations de A_3 est celui voulu. On en déduit, puisque $A'_4 = A_3$ que A_4 croît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $A_4\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^3} - 1\right) > a_4$ ce qui donne $a_4 < 0 < A_4\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc, grâce à sa stricte monotonie, A_4 a une unique racine $\alpha_4 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. De même, puisque $A_4(1) = a_4$, A_4 décroît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et a une unique racine $\beta_4 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On a donc le tableau voulu pour A_4 et donc celui de A_5 en sachant que $A_5(0) = A_5(1) = A_5(1/2) = 0$.

Si le résultat est vrai pour p , du tableau de A_{4p+1} , on déduit le signe de A'_{4p+2} qui donne la décroissance stricte de A_{4p+2} sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sa croissance stricte sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et, comme pour A_4 ceci donne, puisque $\frac{1}{2^{n-1}} - 1 < 0$, $A_{4p+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < a_{4p+2}$ donc A_{4p+2} s'annule une fois et une seule dans chaque intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit le signe de A_{4p+2} donc les variations de A_{4p+3} , puis son signe sachant que A_{4p+3} s'annule en 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Les tableaux de variations de A_{4p+4} et A_{4p+5} s'obtiennent de même et sont bien ceux attendus.

b) ◇ D'après les tableaux ci-dessus $\|A_{2n}\|_{\infty}^{[0,1]} = \max\left(|a_{2n}|, \left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)$ mais, pour $n \geq 1$, $\left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) |a_{2n}| < |a_{2n}|$ donc $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$.

◇ Puisque $A_{2n+1}(1-x) = -A_{2n+1}(x)$, on a $\|A_{2n+1}\|_{\infty}^{[0,1]} = \|A_{2n+1}\|_{\infty}^{[0,1/2]}$. Mais si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|A_{2n+1}(x)| = |A_{2n+1}(0) + \int_0^x A_{2n}(t) dt| = \left|\int_0^x A_{2n}(t) dt\right| \leq x \|A_{2n}\|_{\infty}^{[0,1]}$ car $a_{2n+1} = 0$ si $n \geq 1$. Ainsi $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) a) Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ (il est plus simple de partir de 0) que

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt.$$

Pour $q = 0$, la formule se réduit à $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt$ qui est vraie et si celle est vraie pour q , comme, par intégration par parties,

$$\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt = \int_0^1 A'_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) dt = \left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt,$$

on obtient celle pour $q + 1$.

b) Puisque $A_1(0) = -A_1(1) = -\frac{1}{2}$ et pour $k \geq 1$, $A_{2k}(1) = A_{2k}(0)$ et $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$, on en déduit, pour tout $p \geq 0$,

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(1) + f'(0)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt.$$

III.B.2) $\diamond$ En appliquant à $f_k(t) = f(k+t)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}(f'(k+1) + f'(k)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k) dt \\ &= \frac{1}{2}(f'(k+1) + f'(k)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k) \right) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \end{aligned}$$

donc, en sommant entre n et N , par télescopage,

$$f(N+1) - f(n) = \sum_{k=n}^N f'(k) + \frac{1}{2}(f'(N+1) - f'(n)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n) \right) - \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

et, selon les hypothèses, d'une part, $\forall j$, $f^{(j)}(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et d'autre part, en notant ϵ est le signe constant de $f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$, $\forall t \in [n, +\infty[$, $|A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)| \leq \|A_{2p+1}\|_{\infty}^{[0,1]} \epsilon f^{(2p+2)}(t)$, avec

$$\int_n^x |f^{(2p+2)}(t)| dt = \epsilon \int_n^x f^{(2p+2)}(t) dt = f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -f^{(2p+1)}(n)$$

ce qui montre l'intégrabilité de $f^{(2p+2)}$ donc de $A_{2p+1}^* f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$. En écrivant

$$\sum_{k=n}^N f'(k) = f(N+1) - f(n) - \frac{1}{2}(f'(N+1) - f'(n)) + \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n) \right) + \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

ceci montre la convergence de $\sum_{k \geq n} f'(k)$ et donne, à la limite,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = f - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt.$$

$\diamond$ L'inégalité vue plus haut donne $\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \|A_{2p+1}\|_{\infty}^{[0,1]} \epsilon \int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t) dt = -\epsilon \|A_{2p+1}\|_{\infty}^{[0,1]} f^{(2p+1)}(n)$ donc, avec le résultat de **[A.3.b]**, et vu que le signe du majorant est positif, $\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)|$.

III.B.3) En appliquant la formule ci-dessus à $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ au rang $p-1$, ce qui est légitime car, comme on a vu au **[II.B.1]**, f est de classe C^∞ sur tout $[n, +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in$

$\mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{x^{\alpha+n-1}}$ du signe de $(-1)^{n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on obtient

$$\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

IV - Complément sur l'erreur

IV.A - Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ alors selon [III.A.3.a], $A_n \leq 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $A_n \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Donc, l'inégalité $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(t) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $A_n(t)g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. De même, $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A_n(t)g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. On a donc $\forall t \in [0, 1]$, $A_n(t)g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$ donc $\int_0^1 A_n(t)g(t) dt \geq g\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 A_n(t) dt = 0$ car $n \geq 1$. Le cas $n \equiv 3 \pmod{4}$ se traite de même et on peut résumer en $\forall p \in \mathbb{N}$, $(-1)^p \int_0^1 A_{2p+1}(t)g(t) dt \geq 0$.

IV.A.2) $\diamond$ Par définition (vue au [II.B.2]) et d'après [III.B.3], on a pour $p \geq 1$,

$$\tilde{S}_{n,2p} = S(\alpha) - R_n(\alpha) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j}f^{(2j)}(n) = S(\alpha) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t) dt.$$

Or $\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t) dt = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t) dt = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t+k) dt$ et, en posant, pour $t \in [0, 1]$, $g_k(t) = f^{(2p+2)}(t+k)$, on a $g'_k(t) = f^{(2p+3)}(t+k) \geq 0$ (voir [III.B.3]) donc on peut appliquer [1] et on obtient que $\forall k \geq n$, $\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t+k) dt$ est du signe de $(-1)^p$ et donc $S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}$ est également du signe de $(-1)^p$.

Ceci donne donc $\tilde{S}_{n,4p} \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}$ et $\tilde{S}_{n,4p} \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}$.

$\diamond$ Donc $0 \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p} \leq \tilde{S}_{n,4p+2} - \tilde{S}_{n,4p} = -a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n)$ d'où $|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}| \leq |a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n)|$ et $-a_{4p}f^{(4p)}(n) = \tilde{S}_{n,4p} - \tilde{S}_{n,4p-2} \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p-2} \leq 0$ d'où $|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p-2}| \leq |a_{4p}f^{(4p)}(n)|$. On a donc traité le cas $q = 2p$ et $q = 2p - 1$, donc $\forall q \geq 1$, $|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2q}| \leq |a_{2q+2}f^{(2q+2)}(n)|$.

IV.A.3) On a donc $|S(\alpha) - \tilde{S}_{100,4}| \leq |a_6f^{(6)}(100)|$. Or $f^{(6)}(x) = (-1)^5 \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{x^8} = -\frac{7 \times 6!}{2x^8}$ (voir [III.B.3]) donc $|S(\alpha) - \tilde{S}_{100,4}| \leq \frac{1}{12} 10^{-16} < 10^{-17}$.

IV.B - Séries de Fourier

IV.B.1) $\tilde{A}_p(x + 2\pi) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\left(\frac{x}{2\pi} + 1\right)\right]\right) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} - \left[\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right]\right) = \tilde{A}_p(x)$ car $\forall t$, $[t + 1] = [t] + 1$.

$\forall x \in [0, 2\pi[$, $\tilde{A}_p(x) = A_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ donc, vue la périodicité, $\tilde{A}_p \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV.B.2) ERREUR D'ÉNONCÉ: lire $\tilde{A}_p(x)$ au lieu de $\tilde{A}_p(t)$ dans l'intégrande.

En posant $x = 2\pi t$, on a déjà $\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(u) e^{-2i\pi n t} dt$. Si $n = 0$, on a donc $\hat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(u) dt = 0$ car $p \geq 1$. Si $n \neq 0$, on peut écrire $\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(u) f^{(p+1)}(t) dt$ en prenant $f(t) = \frac{e^{-2i\pi n t}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$ de

façon à utiliser la formule du [III.B.1]. Comme $A_j(1) = A_j(0)$ pour $j \geq 2$ et $f^{(j)}(1) = f^{(j)}(0)$ pour tout j , il vient

$$\hat{A}_p(n) = (-1)^p \left[0 - (-1)^2 \frac{A_1(1) - A_1(0)}{(-2i\pi n)^p} \right]$$

soit $\hat{A}_p(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\hat{A}_p(n) = -\frac{1}{(2i\pi n)^p}$.

IV.B.3) Comme au [1], la restriction de $\tilde{A}_p$ à $[0, 2\pi[$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]$, donc $\tilde{A}_p$ est de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, la valeur en 2π de ce prolongement est $A_p(1)$ donc, si $p \geq 2$, $\tilde{A}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ tandis que si $p = 1$, $\tilde{A}_1(0^+) = -\frac{1}{2}$ et $\tilde{A}_1(0^-) = \frac{1}{2}$. Les théorèmes de Dirichlet et de convergence normale des séries de Fourier donnent donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } p \geq 2, \text{ la série de Fourier de } \tilde{A}_p \text{ converge normalement vers } \tilde{A}_p \text{ sur } \mathbb{R} ; \\ \text{si } p = 1, \text{ la série de Fourier de } \tilde{A}_1 \text{ converge simplement vers } \tilde{A}_1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ vers } 0 \text{ sur } 2\pi\mathbb{Z} . \end{array} \right.$$

IV.B.4) Pour $p \geq 1$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{A}_{2p}(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i\pi n)^{2p}} [e^{inx} + e^{-inx}]$ et $\tilde{A}_{2p}(0) = A_{2p}(0) = a_{2p}$ ce qui donne $a_{2p} = \frac{(1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} S(2p)$.

IV.C - Comportement de l'erreur

IV.C.1) Pour $p \geq 1$, on a $f^{(2p)}(n) = -\frac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)}{n^{\alpha+2p-1}}$ et $f^{(2p+2)}(n) = -\frac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^{\alpha+2p+1}} = \frac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^2} f^{(2p)}(n)$ et, avec [B.4], $\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p) S(2p + 2)}{4n^2 \pi^2 S(2p)}$.

IV.C.2) $\diamond$ L'encadrement du [I.A.3] montre que $S(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 1$ donc, à n fixé, $\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ et, notamment, il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$, $\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| > 1$ et donc dans l'écriture

$$\tilde{S}_{n,2p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n)$$

la dernière somme est somme partielle d'une série (alternée) grossièrement divergente.

On en conclut que n étant fixé, la suite $\left(\tilde{S}_{n,2p} \right)_{p \geq 1}$ ne converge pas vers $S(\alpha)$ quand p tend vers $+\infty$.

$\diamond$ ERREUR D'ÉNONCÉ: « doit-on » est mal venu qui suggère une condition nécessaire alors qu'il s'agit d'une condition suffisante.

On choisit p et n pour que le majorant obtenu au [A.2] soit le plus petit possible. C'est la méthode de sommation au plus petit terme que Poincaré appelait "méthode des astronomes".

* * *
* *
*