

Partie I

$$1. \frac{t}{t+n} = 1 - \frac{n}{t+n} \text{ donc } \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt = \int_0^1 1 - \frac{n}{t+n} dt = [t - n \ln(t+n)]_0^1 = 1 - n(\ln(n+1) - \ln n) = 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ donc } \boxed{\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Or $1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$; Deux séries à termes positifs et équivalent ayant la même nature, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

$$2. S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \text{ par télescopage des termes.}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$3. \text{ Pour } t \in [0, 1], \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t+n} \leq \frac{1}{n-1} \text{ donc } \frac{1}{n+1} \int_0^1 t dt \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} \int_0^1 t dt \text{ et, puisque } \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

$$\text{Or } \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} \text{ et } \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \frac{1}{2n} :$$

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq S - S_n = \frac{1}{2n}}.$$

4. S_n constitue une valeur approchée de S à 10^{-2} [respectivement 10^{-6}] près, si $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2}$ [resp. $\frac{1}{2n} \leq 10^{-6}$] ; $n = 50$ [resp. $n = 5 \cdot 10^5$] convient, ce qui, dans le deuxième cas, est beaucoup trop grand si on tient compte de l'erreur cumulée sur le demi-million de termes à additionner.

Partie II

$$1. \text{ On notera ici } a : t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t} \text{ et } b : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}.$$

En 0 : $a(t) = \frac{1 - (1 - t + t^2/2 + o(t^2))}{t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ donc a admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant un développement en série entière) en 0_+ .

A est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

De plus, a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$; De même, b est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est impropre convergente en $+\infty$, car $\frac{e^{-t}}{t} \ll e^{-t}$ en $+\infty$.

B est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (l'intégrale définissant $B(0)$ est impropre divergente en 0)

A et B sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition comme primitives d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc *a fortiori* continues et dérivables.

$$2. \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^n}{u} du \stackrel{v=1-u}{=} \int_0^1 \frac{1 - v^n}{1-v} dv = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Alors } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^n}{u} du \stackrel{t=1-u}{=} \int_0^1 \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{\frac{t}{n}} \frac{dt}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{t} dt +$$

$$\int_1^n \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - (1-\frac{t}{n})^n}{t} dt + \ln n - \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt$$

3. (a) Soit $\alpha : u \mapsto e^{-u} - (1 - u)$; alors $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(u) = -e^{-u} - 1 \geq 0$ pour $u \geq 0$ donc $\alpha(u) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $\beta : u \mapsto 1 - (1 + u)e^{-u}$; $\beta(0) = 0$ et $\beta'(u) = -ue^{-u} \leq 0$ pour $u \geq 0$ donc $\beta(u) \leq 0$; Alors
 $(1 - u)^2 e^{-u} \leq \frac{(1 - u)^2}{1 + u} \leq 1 - u$.
- (b) Pour $\alpha \in [0, 1]$, $(1 - \alpha)^{n+1} - (1 - \alpha)^n = -\alpha(1 - \alpha)^n \geq -\alpha$ donc, par sommation, $(1 - \alpha)^n \geq -n\alpha$
- (c) Si $u \in [0, 1]$, $e^{-u} - u^2 e^{-u} \leq 1 - u$ donc $e^{-u} - 1 + u \leq u^2 e^{-u}$; Posons $u := \frac{t}{n}$ pour $t \in [0, n]$
 $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-nu} - (1 - u)^n \leq e^{-nu} - 1 + nu \leq nu^2 e^{-nu} \leq \frac{nt^2}{n^2} e^{-t} = \frac{t^2}{n} e^{-t}$ et d'autre part
 $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$.
- (d) Alors $S_n - (A(1) - B(1)) = \int_0^1 \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt =$
 $\int_0^1 \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt + \int_1^n \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = I_1 + I_2 + I_3$
En appelant K_2 l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 3$, $0 \leq I_1 \leq \int_0^1 \frac{t^2}{n} e^{-t} dt \leq \frac{K_2}{n}$, $0 \leq I_2 \leq$
 $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{n} e^{-t} dt \leq \frac{K_2}{n}$, et $0 \leq I_3 \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} dt \leq e^{-n}$ donc $0 \leq S_n - (A(1) - B(1)) \leq \frac{2K_2}{n} + e^{-n}$ tend
vers 0 en $+\infty$.
Par passage à la limite, $\boxed{S = A(1) - B(1)}$.

Partie III

1. $A(x) - A(1) = \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$ et $B(x) - B(1) = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$; Par soustraction, $A(x) - A(1) + B(x) - B(1) =$
 $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ donc $S = A(x) - B(x) - (A(1) - B(1)) = A(x) - B(x) - \ln x$
2. (a) Pour tout $t \in [x, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ donc $0 \leq \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{x} \int_x^\infty e^{-t} dt \leq \frac{1}{x} [e^{-t}]_x^\infty \leq \frac{e^{-x}}{x}$
- (b) $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ est décroissante comme produit de fonctions décroissantes ; De plus : $\frac{e^{-x_0}}{x_0} \leq \frac{10^{-2}}{3}$ pour
 $x_0 \approx 4,2555$ donc $x_0 = 4,5$ convient.
3. (a) $\frac{1 - e^{-t}}{t} = \frac{1}{t} \left(1 - \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!}\right) = \frac{1}{t} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}$ donc par
intégration : $A(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n \cdot (n)!}$; (avec un rayon de convergence
infini, comme celui de e^t) $\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot n!}}$
- (b) $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = x \cdot \frac{n \cdot n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \frac{1}{n+1} \leq 1$ pour $0 \leq x \leq n$; Donc $|a_n x^n|$ est décroissante et
tend vers 0 (puisque $x^n \ll n!$ quand $n \rightarrow +\infty$).
Toutes les conditions du théorème spécial des séries alternées sont vérifiées, et donc
 $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1} x^{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$.
4. On prend alors $x := x_0 = 4,5$, puis n assez grand pour que $|A(x) - A_n(x)| \leq \frac{10^{-2}}{3}$ (avec $A_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_0^k$)
; $n = 13$ convient ; Alors $|S - A_n(x_0) - \ln x_0| \leq |S - A(x_0) - \ln x_0| + |A(x_0) - A_n(x_0)| \leq |S - A(x_0) -$
 $\ln x_0 - B(x_0)| + |B(x_0)| + |A(x_0) - A_n(x_0)| \leq \frac{2}{3} 10^{-2}$.
 $A_n(x_0) - \ln x_0$ est une approximation à 10^{-2} près de S ; on trouve $\boxed{S \approx 0,58}$
En fait, Maple donne $S = 0,57721566490 \dots$

Partie IV

1. Pour $x \geq 0$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$; Pour $x \in]-1, 0[$, $e^{-t} \cdot t^x \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x}$ converge, donc $F(x)$ existe.
2. $t \mapsto t^a e^{-t}$ (resp. $t \mapsto t^b e^{-t}$) est continue sur $]0, 1[$, (resp. $]1, +\infty[$) et $1^a e^{-1} = 1^b e^{-1} = 1$, donc φ est continue sur $]0, 1[,]1, +\infty[$ et en 1, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $a \leq x \leq b$, $t^b \leq t^x \leq t^a$ si $t \in]0, 1[$ et $t^a \leq t^x \leq t^b$ si $t > 1$ donc, par intégration sur $]0, 1[$ puis $]1, +\infty[$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tous $t \in]0, +\infty[$ et $x \in [a, b]$.

D'autre part $\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 t^a e^{-t} dt$ converge (en 0, $t^a e^{-t} \sim t^a$ et $a > -1$) et $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_1^{+\infty} t^b e^{-t} dt$ converge (en $+\infty$, $t^b e^{-t} \leq e^{-t/2}$).

Il en résulte que $f(x, t)$ est dominée indépendamment de $x \in]-1, +\infty[$ par une fonction φ d'intégrale absolument convergente, ce qui implique la continuité de φ sur $] -1, +\infty[$ conformément au programme de PT.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = t^x e^{-t} \ln t$ existe et est clairement continue sur $[a, b] \times]0, +\infty[$; pour montrer que F est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$, il faut montrer une propriété de domination analogue sur $\frac{\partial f}{\partial x} = t^x e^{-t} \ln t$.

Posons $\psi(t) = \begin{cases} -t^a e^{-t} \ln t & \text{si } t \in]0, 1[\\ t^b e^{-t} \ln t & \text{si } t > 1 \end{cases}$; Alors $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$ et $\int_0^{+\infty} \psi(t) dt$ converge, car

$$-t^a e^{-t} \ln t \stackrel{t \rightarrow 0}{\ll} t^{(a-1)/2} \text{ et } \frac{a-1}{2} > -1; -t^b e^{-t} \ln t \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\ll} e^{-t/2}.$$

Finalement F est C^1 et $\boxed{F'(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \ln t dt}$.

4. $\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = [-e^{-t} \ln t]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{e^{-t}}{t} dt = B(1)$; De plus (en remarquant au préalable que $(1 - e^{-t}) \ln t \sim t \ln t \rightarrow 0$ en 0) $A(1) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = [(1 - e^{-t}) \ln t]_0^1 - \int_0^1 \ln t \cdot e^{-t} dt = 0 - \int_0^1 \ln t \cdot e^{-t} dt$ donc $B(1) - A(1) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt = F'(0)$ Comme $S = A(1) - B(1)$, $F'(0) = -S$.

5. Pour tout $x > 0$, $e^{-xt} \ln t = e^{-xt/2} \cdot e^{-xt/2} \ln t \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\ll} e^{-xt/2}$, donc $\int_1^{+\infty} \ln t e^{-xt} dt$ converge.

De plus, $e^{-xt} \ln t \stackrel{t \rightarrow 0}{\ll} \ln t$ et $\int_0^1 \ln t dt$ donc $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-xt} dt$ converge.

En posant $u := xt$, $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln \left(\frac{u}{x} \right) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} (\ln u - \ln x) du = \frac{1}{x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du - x \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right)$;

$$I(x) = \frac{1}{x} \left(-S - \ln x \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right) = -\frac{1}{x} (S + \ln x).$$