Concours Communs Polytechniques - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Équations différentielles, Intégarle de Gaus et théorème du point fixe.

Corrigé par M.TARQI

EXERCICE 1

1. L'équation différentielle (E) s'écrit encore sous la forme $(xy)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$, donc $xy = \arcsin(x^2) + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc les solutions de (E) sur $]-1,0[$ sont de la forme $y_1(x) = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$ et sur $]0,1[$ sont de la forme $y_2 = \dfrac{c_2}{x} + \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$.
2. Soit y une solution de (E), donc sa restriction sur $]-1,0[$ coïncide avec y_1 et sur $]0,1[$ avec y_2, par argument de contitinuité, on aura nécessairement $c_1 = c_2 = 0$ ($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x} = 0$), ainsi $y(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   Réciproquement, cette fonction vérfie l'équation (E).

EXERCICE 2

1. La fonction $\varphi : t \longmapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2009}\varphi(t) = 0$, donc elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Puisque la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = e^{-x^2}$.
   La fonction $(t,x) \longmapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ étant continue sur $[0,1]\times[0,+\infty[$ et admettant une dérivée partielle par rapport à x : $(t,x) \longmapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ qu'est continue sur $[0,1]\times[0,+\infty[$, donc la fonction g, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et
   $$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt.$$
   (b) En utilisant le changement de variable $t = ux$, on obtient $f(x) = \displaystyle\int_0^1 xe^{-(ux)^2}du$.
   On a $\forall x \geq 0$, $g'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt$, ce qui donne
   $$g'(x) = -2f'(x)f(x)$$
   En intégrant, on en déduit
   $$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) = -(f^2(x) - f^2(0))$$
   donc $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$.
   (c) Il est clair que $0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$, donc $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.
   (d) Les dernières inégalités entraînent $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, et la fonction f étant positive, on en déduit que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$I = \lim_{x \longmapsto +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème : Théorème du point fixe et applications

Partie I. Le théorème du point fixe de Picard

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k\|x_{n+1} - x_n\| = k\|u_n\|$, donc cette inégalité écrite entre 0 et $n-1$, donne $\|u_n\| \leq k^n\|u_0\| = k^n\|f(a) - a\|$.
Puisque la série géométrique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} k^n$ converge ($k \in [0,1[$), alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ converge et comme l'espace est de Banach, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. ! ! !

   (b) la somme des n premiers termes de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est

$$S_n = x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_n = x_0 - x_n.$$

   Donc si la série $\sum u_n$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aura une limite $l \in E$ (E complet).

   (c) Comme est f est contractante sur E, alors elle est continue sur E, et l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$, entraîne, par passage à la limite, $l = f(l)$.

   (d) Si f admet un autre point fixe $l' \neq l$, alors on aura

$$\|l - l'\| \leq k\|l - l'\|$$

   ce qui est absurde. Donc le point fixe est unique.

Partie II. Exemples et contre-exemples

2. **Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte**

   (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ \ g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} < 1$. D'autre d'après l'inégalité des accroissements fins, il existe c compris entre x et y tel que $|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x-y| < |x-y|$.

   (b) Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = a$, alors $\frac{\pi}{2} = \arctan(a)$, ce qui est impossible. La fonction g ne peut pas être une contraction stricte, sinon il y aura des points fixes.

3. **Un exemple**

   (a) La relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5} + 1$ s'écrit sous la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, avec g une contraction stricte car $|g(x) - g(x)| = \dfrac{1}{5}|x - y|$. Donc elle admet un point fixe $l = \frac{5}{4}$ et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\frac{5}{4}$.

   (b) La relation $f(g^n(x)) = f(x)$ est vraie pour $n = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, supposons qui elle est vraie à l'ordre n, alors $f(g^{n+1}(x)) = f(g^n(g(x))) = f(g(x)) = f(x)$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(g^n(x)) = f(x)$.

   (c) D'après (a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} g^n(x) = \dfrac{4}{5}$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} g^n(x)) = f\left(\dfrac{4}{5}\right)$. Donc f est bien constante.

4. **Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$**

(a) $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, donc il est complet.

(b) Les deux inégalités se démenèrent en utilisant, par exemple, l'égalité des accroissements finis.

(c) Soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\psi(x,y)-\psi(x',y')\|_1 &= \left\|\left(\frac{1}{4}(\sin(x+y)-\sin(x'+y')), \frac{2}{3}(\arctan(x-y)-\arctan(x'-y'\right.\right.\\
&= \left|\frac{1}{4}(\sin(x+y)-\sin(x'+y'))\right| + \left|\frac{2}{3}(\arctan(x-y)-\arctan(x'-y\right.\\
&\le \frac{1}{4}|(x+y)-(x'+y')| + \frac{2}{3}|(x-y)-(x'-y')|\\
&\le \frac{1}{4}|(x-x')+(y-y')| + \frac{2}{3}|(x-x')-(y-y')|\\
&\le \frac{1}{4}(|x-x'|+|y-y'|) + \frac{2}{3}(|x-x'|+|y-y'|)\\
&\le \frac{11}{12}\|(x,y)-(x',y')\|_1
\end{aligned}$$

(d) ψ étant une contraction stricte, donc admet un point fixe unique (a, b) : $(a, b) = \psi(a, b)$, ce point ni autre que la solution du système (S).

(e) On a $\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right), \psi(0,0)\right\|_\infty = \max\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, et $\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right), (0,0)\right\|_\infty = \frac{1}{2}$.
Supposons qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que la fonction ψ soit une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\|_\infty)$, alors on aura en particulier :

$$\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right), \psi(0,0)\right\|_\infty \le k\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right), (0,0)\right\|_\infty$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} \le \frac{k}{2}$ ou encore $2\pi \le 6k < 6$, inégalité qui est impossible.
Conclusion : La contraction stricte est une condition suffisante pas nécessaire pour qu'une fonction ait un point fixe.

Partie III : Une équation intégrale

5. (a) Si $f \in F$ tel que $\|f\|_\infty = 0$, alors $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc f est nulle sur $[0, 1]$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F$, alors $|\lambda f(x) = |\lambda||f(x)|$ et par suite

$$\sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

c'est-à-dire $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$.

Si f et g sont dans F et $x \in [0, 1]$, alors

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$$

et par conséquent

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

donc

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_8.$$

(b) Toute fonction sur $[0,1]$ est bornée sur $[0,1]$, donc $E \subset F$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, $\forall x_0, x \in G$, on a :

$$\|g(x) - g(x_0)\| = \|g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(x_0) + g_n(x_0) - g(x_0)\|,$$

d'où

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - g_n(x_0)\| + \|g_n(x_0) - g(x_0)\|.$$

Comme la convergence est uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in G, \forall n \geq n_0$,

$$\|g(x) - g_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \|g(x_0) - g_n(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fixons maintenant n en prenant par exemple $n = n_0$ de façon que les deux dernières inégalités soient vérifiées. Alors, la fonction f_n étant continue au point x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|x - x_0\| < \alpha \Longrightarrow \|g_n(x) - g_n(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, en posant $\|x - x_0\| < \alpha$, il est certain que

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la continuité de g au point x_0.

(d) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(E, \|\|_\infty)$, donc c'est une suite de Cauchy de $(F, \|\|_\infty)$ et comme ce dernier est complet alors elle converge dans $(F, \|\|_\infty)$ vers un élément f de F. La convergence dans $(F, \|\|_\infty)$ se traduit par la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f et comme les f_n sont continues, alors f aussi, donc $f \in E$ et par suite $(E, \|\|_\infty)$ est complet.

6. (a) L'application $K : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ étant continue sur la partie compacte $[0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$, donc bornée et atteint ses bornes.

(b) Comme K est continue sur $[0,1]^2$, alors pour chaque $y \in [0,1]$, l'application $x \longmapsto K(x,y)f(y)$ est continue, donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$ est continue, ainsi $\Phi(f)$ apparaît comme somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$, donc elle est continue sur $[0,1]$.

(c) Soient f et h deux éléments de E. On a, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)(x) - \Phi(h)(x)| &= |\lambda \int_0^1 K(x,y)(f(y) - h(y))dy| \\
&\leq |\lambda| M \|f-h\|_\infty \int_0^1 dy \\
&\leq |\lambda| M \|f-h\|_\infty
\end{aligned}$$

et par conséquent : $\|\Phi(f)-\Phi(h)\|_\infty \leq \lambda|M\|f-h\|_\infty$, et comme $M|\lambda|<1$, alors Φ est une contraction stricte de $(E, \|\|_\infty)$ et par suite elle admet un point fixe unique $f \in E$ tel que $f=\Phi(f)$ ou encore, $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Partie IV. Une application géométrique

7. (a) Les droites (MP_M) et $(M'P_{M'})$ sont parallels, donc d'après le théorème de Thales, appliqué dans le triangle (MP_MC) , on a

$$\frac{P_MP_{M'}}{MM'} = \frac{P_MC}{MC} = |\cos c|$$

   (b) Si $M \neq M'$, alors $P_M \neq P_{M'}$ et $Q_M \neq Q'_M$, en considérant les triangles (AP_MQ_M) et (BQ_MR_M) on aura aussi :

$$\frac{Q_MQ_{M'}}{P_MP_{M'}} = |\cos a| \quad \text{et} \quad \frac{R_MR_{M'}}{Q_MQ_{M'}} = |\cos b|$$

   Donc $R_MR_{M'} = |\cos a||\cos b||\cos c|MM' \leq kMM'$ avec $k = |\cos a||\cos b||\cos c| \in [0,1[$ (car $a,b,c \in]0,\pi[$), cette inégalité se traduit à l'aide de φ par l'inégalité :

$$|\varphi(x)-\varphi(x')| \leq k|x-x'|,$$

   autrement dit, la fonction φ est une contraction stricte, donc admet un point fixe unique x, c'est-à-dire il existe un unique point M d'abscisse x tel que $M = R_M$.

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr