

Concours MINES-PONTS 2011

Filière PC

Corrigé de la 2ème épreuve de mathématiques

Damien Broizat

On fixe $A, K \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices :

- symétriques,
- définies positives ($\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow \langle Ax, x \rangle > 0$ et $\langle Kx, x \rangle > 0$).

I. Oscillations d'un certain système linéaire

□ **Q1** - La matrice A est inversible, car $\text{Ker}(A) = \{0\}$. En effet,

$$x \in \text{Ker}(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \langle Ax, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{sinon } \langle Ax, x \rangle > 0).$$

□ **Q2** - Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}x, y \rangle &= \langle A^{-1}x, A(A^{-1}y) \rangle \\ &= \langle {}^t A(A^{-1}x), A^{-1}y \rangle \\ &= \langle AA^{-1}x, A^{-1}y \rangle \quad (A \text{ étant symétrique}) \\ &= \langle x, A^{-1}y \rangle. \end{aligned}$$

Or, on a aussi $\langle A^{-1}x, y \rangle = \langle x, {}^t(A^{-1})y \rangle$, d'où (par unicité de la matrice adjointe)

$${}^t(A^{-1}) = A^{-1},$$

i.e A^{-1} est symétrique.

- **Q3** - • L'application $(.,.)_A$ est clairement une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, symétrique car A est symétrique, définie positive car $\forall x \neq 0, (x, x)_A = \langle Ax, x \rangle > 0$.
- De plus, l'endomorphisme E est autoadjoint pour A . En effet,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, (E(x), y)_A &= \langle AE(x), y \rangle = \langle AA^{-1}Kx, y \rangle \\ &= \langle Kx, y \rangle = \langle x, Ky \rangle \quad (K \text{ étant symétrique}) \\ &= \langle x, A(A^{-1}Ky) \rangle = (x, E(y))_A. \end{aligned}$$

- **Q4** - L'endomorphisme E est symétrique (pour la structure euclidienne $(\mathbb{R}^n, (.,.)_A)$), donc il est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (dans une base " A -orthonormée" de $\mathbb{R}^n$). Notons $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ ses valeurs propres. En outre, E est défini positif (toujours pour cette même structure euclidienne), car pour $x \neq 0, (E(x), x)_A = \langle AE(x), x \rangle = \langle Kx, x \rangle > 0$. Donc les valeurs propres de E sont strictement positives. D'où l'existence d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ et de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ (pas forcément distincts) tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad E(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{i.e} \quad A^{-1}K e_i = \lambda_i e_i.$$

- **Q5** - • On diagonalise l'endomorphisme E pour résoudre l'équation différentielle (1) :
 $x \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ est solution de (1) $\iff \forall t \geq 0, \quad x''(t) = -Ex(t)$.
 On décompose sur la base de diagonalisation : pour tout $x \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$, il existe n fonctions $x_i \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) e_i.$$

D'où x est solution de (1) si et seulement si

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i''(t) e_i = - \sum_{i=1}^n x_i(t) \lambda_i e_i,$$

c'est-à-dire (en identifiant les fonctions coordonnées)

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \geq 0, \quad x_i''(t) = -\lambda_i x_i(t).$$

Ceci équivaut à

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \exists (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \geq 0, \quad x_i(t) = a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}),$$

ou encore à

$$\exists (a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \forall t \geq 0, \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) e_i$$

On en déduit que

$$x \text{ est solution de (1)} \iff x \in \text{Vect} \left(\left(t \mapsto \cos(t\sqrt{\lambda_i}) e_i \right)_{1 \leq i \leq n}, \left(t \mapsto \sin(t\sqrt{\lambda_i}) e_i \right)_{1 \leq i \leq n} \right).$$

- L'ensemble des solutions de (1) est donc un sous-espace vectoriel de $C^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ de dimension $2n$, car la famille $\left(t \mapsto \cos(t\sqrt{\lambda_i}) e_i, t \mapsto \sin(t\sqrt{\lambda_i}) e_i \right)_{1 \leq i \leq n}$ est libre :
 en effet, si

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}) e_i = 0,$$

alors l'indépendance linéaire des $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ donne

$$\forall t \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \alpha_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \beta_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}) = 0,$$

d'où $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = 0$ (en évaluant en $t = 0$), puis $\beta_i = 0$ (en évaluant en $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_i}}$).

- **Q6** - En notant $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les fonctions coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(A_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ les coefficients de la matrice A , on a

$$\forall t \geq 0, \quad \langle Ax, y \rangle(t) = \sum_{i=1}^n (Ax(t))_i y_i(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j(t) y_i(t).$$

Donc pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\langle Ax, y \rangle(t)) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x'_j(t) y_i(t) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_j(t) y'_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j(t) \right)' y_i(t) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j(t) \right) y'_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^n (Ax'(t))_i y_i(t) + \sum_{i=1}^n (Ax(t))_i y'_i(t) \\
&= \langle Ax'(t), y(t) \rangle + \langle Ax(t), y'(t) \rangle.
\end{aligned}$$

□ **Q7** - Soit $x \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ une solution de (1). On note, pour $t \geq 0$,

$$T(x')(t) = \frac{1}{2} \langle Ax'(t), x'(t) \rangle, \quad U(x)(t) = \frac{1}{2} \langle Kx(t), x(t) \rangle$$

On a $T(x'), U(x) \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ car x est de classe C^2 , donc x' de classe C^1 . D'après la question précédente, on a

$$\frac{d}{dt}(T(x')(t) + U(x)(t)) = \frac{1}{2}(\langle Ax''(t), x'(t) \rangle + \langle Ax'(t), x''(t) \rangle + \langle Kx'(t), x(t) \rangle + \langle Kx(t), x'(t) \rangle).$$

Les matrices A et K étant symétriques, on a

$$\frac{d}{dt}(T(x')(t) + U(x)(t)) = \langle Ax''(t), x'(t) \rangle + \langle Kx(t), x'(t) \rangle = \langle Ax''(t) + Kx(t), x'(t) \rangle.$$

Or $Ax''(t) = -Kx(t)$, donc

$$\frac{d}{dt}(T(x')(t) + U(x)(t)) = \langle 0, x'(t) \rangle = 0,$$

ce qui prouve que $t \mapsto T(x')(t) + U(x)(t)$ est constante sur $[0, +\infty[$.

II. Résultats intermédiaires

□ **Q8** - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \sin(t) dt = \left[\frac{-2}{k+1} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^{k+1} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{k+1}.$$

En outre, par 2π -périodicité puis par parité, on a

$$\frac{1}{c_k} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt = \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt = 2 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k dt.$$

Vu que $\forall t \in [0, \pi], 0 \leq \sin t \leq 1$, on obtient

$$\frac{1}{c_k} \geq 2 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \sin(t) dt = \frac{4}{k+1},$$

d'où $c_k \leq \frac{k+1}{4}$.

□ **Q9** - Soit $0 < \varepsilon < \pi$. On pose $d_k(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon \leq t \leq 2\pi - \varepsilon} R_k(t) = \sup_{\varepsilon \leq t \leq 2\pi - \varepsilon} c_k \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k$.

Tout d'abord, vu que $\forall t \in \mathbb{R}, R_k(2\pi - t) = R_k(t)$, on a

$$d_k(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon \leq t \leq \pi} R_k(t).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1 + \cos t}{2}$ étant positive et décroissante sur $[0, \pi]$, on a (puisque $[\varepsilon, \pi] \subsetneq [0, \pi]$),

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad d_k(\varepsilon) = c_k \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right)^k \leq \left(\frac{k+1}{4} \right) q^k \leq k q^k,$$

avec $q = \left(\frac{1 + \cos(\varepsilon)}{2} \right)^k \in]0, 1[$. On a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} k q^k = 0$, ce qui prouve par le théorème des gendarmes ($0 \leq d_k(\varepsilon) \leq k q^k$) que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k(\varepsilon) = 0$.

□ **Q10** - Soit $0 < \varepsilon < \pi$, et $k \in \mathbb{N}$. Soit $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $u \in \mathbb{R}$.

- En effectuant le changement de variable $t = u - t_1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R_k(u - t) h(t) dt &= \int_{u-2\pi}^u R_k(t_1) h(u - t_1) dt_1 \\ &= \int_0^{2\pi} R_k(t_1) h(u - t_1) dt_1, \end{aligned}$$

car $t_1 \mapsto R_k(t_1) h(u - t_1)$ est 2π -périodique, donc les intégrales de cette fonction sur n'importe quel intervalle de largeur 2π ont une valeur commune.

- Pour établir l'inégalité demandée, on utilise que $\int_0^{2\pi} R_k(t) dt = 1$, pour réécrire $h(u)$ comme une intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} R_k(u - t) h(t) dt - h(u) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} R_k(u - t) h(t) dt - \int_0^{2\pi} R_k(t) h(u) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(t) |h(u - t) - h(u)| dt \\ &\leq \int_0^\varepsilon R_k(t) |h(u - t) - h(u)| dt + \int_{2\pi - \varepsilon}^{2\pi} R_k(t) |h(u - t) - h(u)| dt \\ &\quad + \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} R_k(t) |h(u - t) - h(u)| dt. \end{aligned}$$

Ensuite, on majore chacune des trois intégrales.

Tout d'abord, par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $t \geq 0$,

$$|h(u - t) - h(u)| \leq t \|h'\|$$

(car la dérivée h' est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, donc bornée). D'où

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon R_k(t) |h(u - t) - h(u)| dt &\leq \|h'\| \int_0^\varepsilon t R_k(t) dt \leq \varepsilon \|h'\| \int_0^\varepsilon R_k(t) dt \\ &\leq \varepsilon \|h'\| \int_0^{2\pi} R_k(t) dt = \varepsilon \|h'\|. \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on utilise les mêmes types de majorations, en réécrivant d'abord

$$\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t) |h(u-t) - h(u)| dt = \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t) |h(u-t+2\pi) - h(u)| dt$$

(vu que h est 2π -périodique). On a donc (toujours par les accroissements finis)

$$\begin{aligned} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t) |h(u-t) - h(u)| dt &\leq \|h'\| \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} (t-2\pi) R_k(t) dt \\ &\leq \varepsilon \|h'\| \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t) dt \leq \varepsilon \|h'\|. \end{aligned}$$

Enfin, on peut majorer la troisième intégrale de la façon suivante :

puisque $\forall t \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $0 \leq R_k(t) \leq d_k(\varepsilon)$ et $|h(u-t) - h(u)| \leq |h(u-t)| + |h(u)| \leq 2\|h\|$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R_k(t) |h(u-t) - h(u)| dt &\leq \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} 2\|h\| d_k(\varepsilon) dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} 2\|h\| d_k(\varepsilon) dt = 4\pi\|h\| d_k(\varepsilon). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u-t) h(t) dt - h(u) \right| \leq \varepsilon \|h'\| + \varepsilon \|h'\| + 4\pi\|h\| d_k(\varepsilon) = 2\|h'\|\varepsilon + 4\pi\|h\| d_k(\varepsilon).$$

III. Un théorème ergodique

□ **Q11** - Soit x une solution de (1) :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^2 \left(a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^2 \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \left(\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) e_i, \end{aligned}$$

avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$.

On a $\left(\frac{a_i}{c_i}\right)^2 + \left(-\frac{b_i}{c_i}\right)^2 = 1$, donc il existe $\varphi_i \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\varphi_i) = \frac{a_i}{c_i} = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \\ \sin(\varphi_i) = -\frac{b_i}{c_i} = -\frac{b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \end{cases}$$

On a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$x(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \left(\cos(\varphi_i) \cos(t\sqrt{\lambda_i}) - \sin(\varphi_i) \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) e_i = \sum_{i=1}^2 c_i \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i) e_i.$$

□ **Q12** - Soit $f \in C_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \theta_1 + 2\pi m \in [0, 2\pi] \\ \theta_2 + 2\pi n \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

D'où, par une récurrence triviale, on a

$$|f(\theta_1, \theta_2)| = |f(\theta_1 + 2\pi m, \theta_2 + 2\pi n)| \leq \sup_{[0, 2\pi]^2} |f|.$$

Ceci montre que $|f|$ est majorée sur $\mathbb{R}^2$ et que $\sup_{\mathbb{R}^2} |f| \leq \sup_{[0, 2\pi]^2} |f|$.

L'inégalité inverse est évidente. D'où

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |f| = \sup_{[0, 2\pi]^2} |f|.$$

Enfin, la borne supérieure de $|f|$ est atteinte, car $[0, 2\pi]^2$ est compacte et f est continue.

□ **Q13** - Dans cette question, on suppose que $f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 l}$ avec $(j, l) \in \mathbb{Z}^2$.

- Si $(j, l) = (0, 0)$, alors $f \equiv 1$ et le théorème ergodique est évident, car les deux intégrales de la relation (4) valent 1, quel que soit $T > 0$.
- Si $(j, l) \neq (0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t\sqrt{\lambda_1} + \varphi_1, t\sqrt{\lambda_2} + \varphi_2) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(t\sqrt{\lambda_1} + \varphi_1)j} e^{i(t\sqrt{\lambda_2} + \varphi_2)l} dt \\ &= \frac{e^{i(\varphi_1 j + \varphi_2 l)}}{T} \int_0^T e^{it(j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2})} dt \end{aligned}$$

Or $j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2} \neq 0$, sinon $j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2} = 0$, et (puisque $j \neq 0$ ou $l \neq 0$), on obtient $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}} \in \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire.

D'où

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt = \frac{e^{i(\varphi_1 j + \varphi_2 l)}}{T} \left[\frac{e^{it(j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2})}}{i(j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2})} \right]_0^T,$$

ce qui entraîne

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt \right| \leq \frac{2}{T |j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2}|},$$

et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt = 0.$$

En outre,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 l} d\theta_1 \right) d\theta_2.$$

Si $j \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{e^{i\theta_1 j}}{ij} e^{i\theta_2 l} \right]_{\theta_1=0}^{\theta_1=2\pi} \right) d\theta_2 = 0.$$

Si $j = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta_2 l} d\theta_1 \right) d\theta_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} e^{i\theta_2 l} d\theta_2 = 0 \text{ car } l \neq 0.$$

Dans tous les cas, on a donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt = 0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$,

ce qui prouve le théorème ergodique dans le cas $(j, l) \neq (0, 0)$.

□ **Q14** - Pour $f \in C_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Transformons f_k : pour tout réel t , on a

$$\begin{aligned} R_k(t) &= \frac{c_k}{2^k} (1 + \cos(t))^k = \frac{c_k}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos^j(t) \\ &= \frac{c_k}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^j = \frac{c_k}{2^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} \binom{k}{j} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} e^{2ilt} e^{-ij t}, \end{aligned}$$

soit

$$R_k(t) = \sum_{0 \leq l \leq j \leq k} \xi_{l,j,k} e^{i(2l-j)t},$$

en posant $\xi_{l,j,k} = \frac{c_k}{2^{k+j}} \binom{k}{j} \binom{j}{l}$.

Pour $j \in \{0, \dots, k\}$ fixé et $l \in \{0, \dots, j\}$, on a $-j \leq 2l - j \leq j$, donc (puisque $0 \leq j \leq k$), on a $2l - j \in \{-k, \dots, k\}$. Il existe donc des réels $(\alpha_m)_{-k \leq m \leq k}$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad R_k(t) = \sum_{m=-k}^k \alpha_m e^{imt}.$$

D'où

$$\begin{aligned} f_k(u, v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=-k}^k \sum_{l=-k}^k \alpha_j \alpha_l e^{ij(u-\theta_1)} e^{il(v-\theta_2)} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \sum_{-k \leq j, l \leq k} \alpha_j \alpha_l \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta_1} e^{-il\theta_2} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right) e^{iuj} e^{ivl} \end{aligned}$$

En notant $a_{j,l} = \alpha_j \alpha_l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta_1} e^{-il\theta_2} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$ pour $(j, l) \in \{-k, \dots, k\}^2$, on obtient donc la forme voulue.

Enfin, par linéarité, il est clair que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k vérifie le théorème ergodique (puisque f_k est combinaison linéaire de fonctions qui vérifient le théorème ergodique).

□ **Q15** - Pour $\varepsilon \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, évaluons $|f_k - f|$.

On a $f \in C_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, donc, pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $f_1 : t \mapsto f(t, \theta_2)$ et $f_2 : t \mapsto f(\theta_1, t)$ sont dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et on a

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f'_1(\theta_1) = \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2), \quad f'_2(\theta_2) = \frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2).$$

D'après la question 10 (appliquée aux fonctions f_1 et f_2), on a donc, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2) \right| \leq 2\varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon),$$

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 - f(\theta_1, v) \right| \leq 2\varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon).$$

Donc $|f_k(u, v) - f(u, v)|$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 - \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 - f(u, v) \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \left| \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2) \right| d\theta_2 \\ &\quad + \left| \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 - f(u, v) \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \left[2\varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \right] d\theta_2 + 2\varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \\ &= 2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\text{car } \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) d\theta_2 = \int_0^{2\pi} R_k(t) dt = 1.$$

□ **Q16** - Montrons que f vérifie le théorème ergodique.

Soit $\varepsilon > 0$. Vu que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k(\varepsilon) = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_k(\varepsilon) < \varepsilon$.

La fonction f_k vérifiant le théorème ergodique (d'après la question 14), on a

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\theta(t)) dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\exists T_0 > 0$ tel que :

$$T \geq T_0 \implies \left| \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\theta(t)) dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon.$$

D'où, pour tout $T \geq T_0$,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f(\theta(t)) - f_k(\theta(t))) dt \right| + \left| \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\theta(t)) dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \\
& \quad + \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \\
& \leq \frac{1}{T} \sup_{t \in [0, T]} |f(\theta(t)) - f_k(\theta(t))| \int_0^T dt + \varepsilon \\
& \quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} |f_k(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2)| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \\
& = \sup_{t \in [0, T]} |f(\theta(t)) - f_k(\theta(t))| + \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} |f_k(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2)| + \varepsilon \\
& \leq 2\|f - f_k\| + \varepsilon \leq 2 \left(2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \right) + \varepsilon \\
& \leq 4\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 16\pi \|f\| \varepsilon + \varepsilon \leq \underbrace{\left(4 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + 4 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| + 16\pi \|f\| + 1 \right)}_{C(f)} \varepsilon
\end{aligned}$$

On a donc montré qu'il existe une constante $C(f)$ ne dépendant que de f telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T_0 > 0, \quad T \geq T_0 \implies \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta(t)) dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \leq C(f)\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence voulue.

□ **Q17** - Soit $x(t) = \cos(\theta_1(t)) e_1 + \cos(\theta_2(t)) e_2$ où $(\theta_1(t), \theta_2(t)) = \theta(t)$.
Supposons (par l'absurde) que

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) \in X \setminus \Omega.$$

• Alors il existe $\Phi \in C_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ à variables séparées tels que :

$$\forall t \geq 0, \quad \Phi(\theta(t)) = 0.$$

En effet, notons φ l'isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\varphi: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(u, v) & \mapsto ue_1 + ve_2.
\end{aligned}$$

La partie $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid ue_1 + ve_2 \in \Omega\}$ est un ouvert non vide de $] -1, 1[^2$ car Ω est un ouvert non vide de $\varphi[-1, 1[^2$, et $U = \varphi^{-1}(\Omega)$.

D'où $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} 0 < a < b < \pi \\ 0 < c < d < \pi \end{cases}$

et

$$] \cos(b), \cos(a)[\times] \cos(d), \cos(c)[\subset U.$$

Considérons alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi: [0, \pi]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \phi_{a,b}(\theta_1) \phi_{c,d}(\theta_2)\end{aligned}$$

On a

$$\varphi\left(]\cos(b), \cos(a)[\times]\cos(d), \cos(c)[\right) \subset \varphi(U) = \Omega.$$

Par hypothèse, on a

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = \varphi(\cos(\theta_1(t)), \cos(\theta_2(t)))$$

donc (puisque x ne rencontre pas Ω), on a

$$\forall t \geq 0, \quad (\cos(\theta_1(t)), \cos(\theta_2(t))) \notin]\cos(b), \cos(a)[\times]\cos(d), \cos(c)[.$$

La fonction $\cos$ étant une bijection strictement décroissante de $]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[$, ceci entraîne (puisque $0 < a < b < \pi$ et $0 < c < d < \pi$)

$$\forall t \geq 0, \quad \theta(t) \notin [a, b] \times [c, d].$$

On prolonge alors Φ à $\mathbb{R}^2$ de manière C^1 et périodique afin d'obtenir une fonction $\Phi \in C^1_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ (on peut car Φ est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]^2$ et elle est nulle en dehors de $[a, b] \times [c, d] \subsetneq [0, 2\pi]^2$). On a alors

$$\forall t \geq 0, \quad \Phi(\theta(t)) = 0.$$

- D'après le théorème ergodique, on a alors (en passant à la limite dans les moyennes temporelles) :

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 0.$$

Mais Φ n'est pas nulle sur $[0, 2\pi]^2$ donc $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 > 0$, ce qui est contradictoire.

On a donc

$$\exists t \geq 0, \quad x(t) \in \Omega.$$