

BANQUE D'ÉPREUVES E3A 2022

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures
(corrigé)

Exercice 1

- Les réels $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.
- Posons : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_n = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$. Il existe une variable aléatoire avec la loi de l'énoncé si et seulement si :
 - $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_n \alpha \geq 0$;
 - la série $\sum_{n \geq 1} p_n \alpha$ converge, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \alpha = 1$.

Étudions d'abord la seconde condition. Pour tout entier $N \geq 1$ on a, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^N p_n \alpha = \alpha \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right).$$

On reconnaît une somme télescopique, donc pour tout entier $N \geq 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^N p_n \alpha = \alpha \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{6}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} p_n \alpha$ converge, et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \alpha = \frac{\alpha}{6}$. Pour que cette somme soit égale à 1, il faut et suffit d'avoir : $\alpha = 6$, et pour ce choix de α on a bien $p_n \alpha \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$. On en déduit qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad P(X = n) = \frac{18}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

- (3.1) La variable X admet une espérance si la série $\sum_{n \geq 1} nP(X = n)$ converge (absolument, ce qu'on peut omettre ici vu que c'est à termes positifs). Or, pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP(X = n) &= \sum_{n=1}^N \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^N \frac{9((n+3) - (n+1))}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= 9 \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît encore une somme télescopique, donc pour tout entier $N \geq 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^N nP(X = n) = 9 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+2)(N+3)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

On en déduit d'une part que la série $\sum_{n \geq 1} nP(X = n)$ converge, et donc que X admet une espérance, et d'autre part :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{3}{2}.$$

- (3.2) D'après le théorème de transfert, $X(X+1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n(n+1)P(X = n) = \sum_{n \geq 1} \frac{18}{(n+2)(n+3)}$ converge (absolument), et le cas échéant $E(X(X+1))$ est la somme de cette série. Or, après une décomposition en éléments simples, on a :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{18}{(n+2)(n+3)} = 18 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

est une série télescopique, qui converge d'après le lien suite-série puisque $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n \geq 1}$ converge (vers 0). Ainsi $X(X+1)$ admet une espérance, et on a :

$$E(X(X+1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18}{(n+2)(n+3)} = 18 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = 18 \left(\frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} \right) = 6.$$

(3.3) Puisque $X^2 = X(X+1) - X$, et que $X(X+1)$ et X admettent une espérance, par linéarité X^2 en admet une aussi. On en déduit que X admet une variance. De plus, partant de la relation de Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X+1)) - E(X) - (E(X))^2.$$

Nous avons calculé les espérances de X et $X(X+1)$ dans les questions précédentes. On en déduit :

$$V(X) = 6 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Exercice 2

1. On reconnaît une somme géométrique. Si $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^r q^k = \frac{q^{r+1} - 1}{q - 1}.$$

Si $q = 1$, alors : $\sum_{k=0}^r q^k = r + 1$.

2. On a : $X^p - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{p-1} X^k$, ce qui montre que le quotient dans la division euclidienne de

$X^p - 1$ par $X - 1$ est $\sum_{k=0}^{p-1} X^k$, tandis que le reste est nul.

3. L'application $x \mapsto \int_1^x P(t)dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto P(x)$ s'annulant en 1. En particulier, comme une primitive d'un polynôme est un polynôme, l'application $x \mapsto \int_1^x P(t)dt$ est polynomiale : notons P_0 le polynôme associé. Comme il s'annule en 1 d'après ce qu'on vient de rappeler, il est divisible par $X - 1$: soit, donc, $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_0 = (X - 1)Q$. Alors : $\deg(Q) = \deg(P_0) - 1 = (\deg(P) + 1) - 1 = \deg(P) \leq n$, donc $Q \in E_n$, et on a :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{P_0(x)}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \int_1^x P(t)dt,$$

d'où le résultat. Le polynôme Q est évidemment unique, vu qu'il est défini de manière unique comme le quotient de P_0 par $X - 1$.

4. L'application f est linéaire, par linéarité de l'intégrale. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme de E , il s'agit de montrer : $\forall P \in E_n, f(P) \in E_n$. Or nous avons démontré ci-dessus que si $P \in E_n$, alors : $\deg(Q) \leq n$, d'où le résultat. Ainsi f est un endomorphisme de E_n .

5. Il s'agit de montrer que f admet une application réciproque, et de l'expliciter. Soit $Q \in E_n$. Nous allons trouver la réciproque de f en résolvant l'équation $Q = f(P)$ d'inconnue $P \in E_n$. On la résout par analyse et synthèse. Pour cela, on note que si cette équation est vérifiée alors, après multiplication par $x - 1$ et dérivation, on a :

$$\forall x \neq 1, \quad P(x) = Q(x) + (x - 1)Q'(x).$$

Par conséquent, s'il y a une solution, alors ce doit être : $P = Q + (X - 1)Q'$ (on passe des applications polynomiales aux polynômes en notant que si l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \neq 1$, alors le polynôme $P - (Q + (X - 1)Q')$ admet pour racines tous les réels différents de 1, ce qui fournit une infinité de racines ; ce n'est possible que si $P - (Q + (X - 1)Q') = 0_{E_n}$). Réciproquement, le polynôme $P = Q + (X - 1)Q'$ convient, puisqu'on peut intégrer ci-dessous en reconnaissant la dérivée d'un produit :

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1} \int_1^x (Q(t) + (t-1)Q'(t)) dt = \frac{1}{x-1} [(t-1)Q(t)]_1^x = \frac{(x-1)Q(x)}{x-1} = Q(x),$$

d'où : $f(Q + (X - 1)Q') = Q$.

En résumé, on a montré que pour tout $Q \in E_n$, l'équation $Q = f(P)$ admet une unique solution $P \in E_n$. Cela montre d'une part que f est bijective, puisque tout élément de E_n admet exactement un antécédent, et d'autre part que son application réciproque est définie par :

$$\forall Q \in E_n, \quad f^{-1}(Q) = Q + (X - 1)Q' = ((X - 1)Q)'$$

6. Pour déterminer A et A^{-1} , il suffit de déterminer les coordonnées (dans la base canonique) de $f(X^k)$ et $f^{-1}(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Or :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1} \int_1^x t^k dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^x = \frac{1}{k+1} \frac{x^{k+1} - 1}{x-1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i,$$

donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(X^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k X^i$, et :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{-1}(X^k) = X^k + (X - 1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1},$$

tandis que pour $k = 0$ on a : $f^{-1}(1) = 1$. On en déduit :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

7. Comme A et A^{-1} sont des matrices triangulaires, leurs valeurs propres se lisent sur la diagonale. On en déduit :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \frac{1}{k+1} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}, \quad \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A^{-1}) = \{k+1 \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Sans surprise, les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses de celles de A . À comparer avec le résultat de la question 11, qui peut se traiter indépendamment de celle-ci.

8. Les matrices A et A^{-1} sont d'ordre $n+1$ et admettent $n+1$ valeurs propres distinctes : elles sont donc diagonalisables (et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1).
9. On va utiliser la caractérisation des ordres de multiplicités avec les dérivées. C'est pertinent puisque α est clairement racine de $(X-1)Q$ si c'est racine de Q , et que $f^{-1}(Q) = ((X-1)Q)'$ est sa dérivée. Supposons d'abord $\alpha = 1$. Comme 1 est racine d'ordre de multiplicité k de Q , on peut écrire : $Q = (X-1)^k R$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$ qui ne s'annule pas en 1, et donc : $(X-1)Q = (X-1)^{k+1} R$, avec R ne s'annulant pas en 1. On en déduit que 1 est racine de $(X-1)Q$, d'ordre de multiplicité $k+1$, et donc 1 est racine de $((X-1)Q)'$ d'ordre de multiplicité k .
- Supposons à présent $\alpha \neq 1$. Dans ce cas, $(X-1)Q$ admet α pour racine avec ordre de multiplicité k . Alors :

- si la racine est simple, c'est-à-dire si $k = 1$, alors $((X - 1)Q)'(1) \neq 0$, donc α n'est pas racine de $f^{-1}(Q)$;
- si $k \geq 2$, alors α est racine de $f^{-1}(Q)$, d'ordre de multiplicité $k - 1$.

On peut unifier ces deux cas, en prenant pour convention qu'une racine d'ordre de multiplicité 0 n'est pas une racine.

En résumé :

- si $\alpha = 1$, alors $f^{-1}(Q)$ admet 1 pour racine avec le même ordre de multiplicité;
- si $\alpha \neq 1$, alors l'ordre de multiplicité de α comme racine de $f^{-1}(Q)$ est $k - 1$ (et en particulier ce n'est pas une racine si $k = 1$).

10. On rappelle que les valeurs propres de f^{-1} sont de la forme $k + 1$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminons le sous-espace propre de f^{-1} associé à $k + 1$, en résolvant l'équation $f^{-1}(Q) = (k + 1)Q$ d'inconnue $Q \in E_n$.

Si $f^{-1}(Q) = (k + 1)Q$, alors en particulier $f^{-1}(Q)$ et Q ont les mêmes racines complexes, avec les mêmes ordres de multiplicité (vu que $f^{-1}(Q)$ et $(k + 1)Q$ sont égaux; il est évident que Q et $(k + 1)Q$ ont les mêmes racines). Or, si $\alpha \neq 1$, alors la question précédente montre que l'ordre de multiplicité d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ n'est pas la même pour $f^{-1}(Q)$ et Q si $\alpha \neq 1$; on en déduit que 1 est l'unique racine dans \mathbb{C} de Q , sous peine de contradiction. Comme tout polynôme est scindé sur \mathbb{C} par le théorème fondamental de l'algèbre, on en déduit que Q est de la forme : $Q = c(X - 1)^\ell$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Or :

$$\begin{aligned} f^{-1}(c(X - 1)^\ell) = (k + 1)c(X - 1)^\ell &\iff ((X - 1)c(X - 1)^\ell)' = c(k + 1)(X - 1)^\ell \\ &\iff c(\ell + 1)(X - 1)^\ell = c(k + 1)(X - 1)^\ell \\ &\iff c(\ell + 1) = c(k + 1), \end{aligned}$$

si et seulement si : $\ell = k$, ou : $c = 0$ (qui implique $Q = 0_{E_n}$). Cette étude montre que si $f^{-1}(Q) = (k + 1)Q$, alors : $Q \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}((X - 1)^k)$, et remonter les équivalences ci-dessus permet de s'assurer que la réciproque est vraie (on peut aussi invoquer un argument dimensionnel pour transformer cette inclusion en une égalité : on a en effet déjà justifié que les sous-espaces propres sont de dimension 1). Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \ker(f^{-1} - (k + 1)\text{Id}_{E_n}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((X - 1)^k).$$

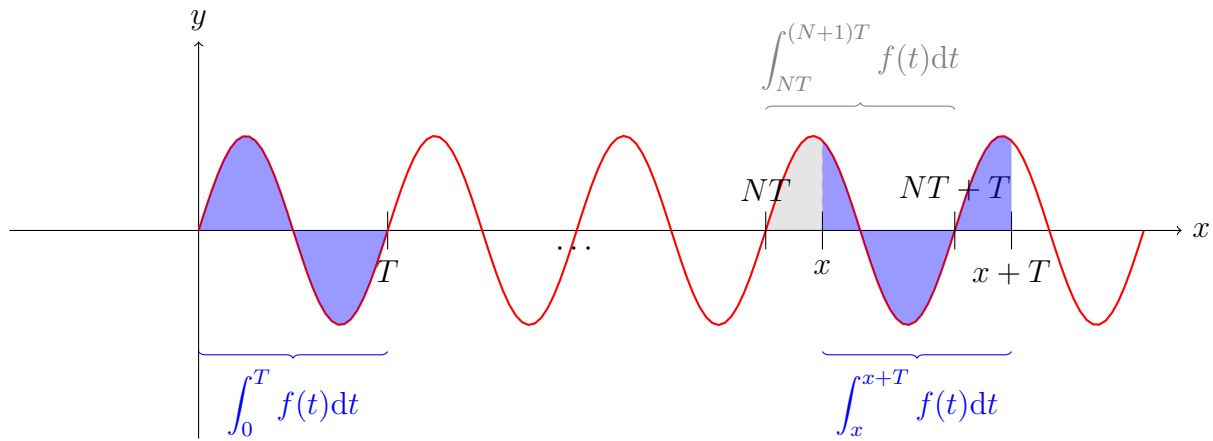
11. On a clairement, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $P \in E_n$:

$$\begin{aligned} P \in \ker\left(f - \frac{1}{k + 1}\text{Id}_{E_n}\right) &\iff f(P) = \frac{1}{k + 1}P \iff P = f^{-1}\left(\frac{1}{k + 1}P\right) = \frac{1}{k + 1}f^{-1}(P) \\ &\iff f^{-1}(P) = (k + 1)P \\ &\iff P \in \ker(f^{-1} - (k + 1)\text{Id}_{E_n}), \end{aligned}$$

donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \ker\left(f - \frac{1}{k + 1}\text{Id}_{E_n}\right) = \ker(f^{-1} - (k + 1)\text{Id}_{E_n})$. D'où le résultat.

Exercice 3

1. Pour comprendre le découpage d'intégrale que nous allons faire en vue de ce résultat, notez que l'égalité $\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ est visuelle, puisque le graphe de f s'obtient par translation ainsi que sur la figure ci-dessous. On note N le plus grand entier tel que $NT \leq x$ (il est égal à : $N = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$, si on souhaite l'expliciter; mais ce n'est pas nécessaire pour la suite du raisonnement).



Si on raisonne *uniquement* en termes d'aires, sans invoquer de théorie de l'intégration, on observe sur la figure que $\int_{NT}^x f = \int_{NT+T}^{x+T} f$ du fait de la périodicité de f , et qu'alors :

$$\int_x^{x+T} f = \int_x^{NT+T} f + \int_{NT+T}^{x+T} f = \int_x^{NT+T} f + \int_{NT}^x f = \int_{NT}^{NT+T} f$$

d'après la relation de Chasles. En utilisant encore une fois la périodicité, il devient clair que $\int_{NT}^{NT+T} f = \int_0^T f$. On obtient alors bien : $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$.

À présent, reprenons ce raisonnement en le rendant rigoureux. Le point de départ reste le même que ci-dessus :

$$\int_x^{x+T} f = \int_x^{NT+T} f + \int_{NT+T}^{x+T} f.$$

Justifions qu'on a : $\int_{NT+T}^{x+T} f = \int_{NT}^x f$. Pour cela, on utilise à profit la périodicité (qui fut le fondement de ce raisonnement en termes d'aires) avec le changement de variable $u = t - T$ puisqu'il laisse invariant f , tout en nous ramenant à l'intégrale sur l'intervalle translaté de $-T$. Ce changement de variable est licite, puisque l'application $t \mapsto t - T$ est de classe C^1 sur $[NT, x]$. Comme $du = dt$, il nous donne :

$$\int_{NT+T}^{x+T} f(t)dt = \int_{NT}^x f(u + T)du = \int_{NT}^x f(u)du,$$

la dernière égalité provenant de la T -périodicité de f . Alors, comme dans le raisonnement non rigoureux ci-dessus, on peut écrire :

$$\int_x^{x+T} f = \int_x^{NT+T} f + \int_{NT+T}^{x+T} f = \int_{NT}^{NT+T} f.$$

On effectue cette fois-ci le changement de variable $u = t - NT$ dans cette dernière intégrale (pour que l'intervalle d'intégration devienne $[0, T]$), et on a :

$$\int_{NT}^{NT+T} f(t)dt = \int_0^T f(u + NT)du = \int_0^T f(u)du.$$

Pour la dernière égalité, on utilise : $\forall N \in \mathbb{Z}, \forall u \in \mathbb{R}, f(u + NT) = f(u)$, égalité qui se démontre pour $N \in \mathbb{N}$ par récurrence sur N grâce à la relation : $\forall u \in \mathbb{R}, f(u + T) = f(u)$; pour N entier négatif, on procède par récurrence sur $-N$, mais en utilisant : $\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = f(u - T)$. Ainsi on a bien, au bout du compte :

$$\int_x^{x+T} f = \int_0^T f(u)du,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En résumé : pensez à voir l'intégrale en tant qu'aire pour savoir ce que vous devez démontrer.

2. (2.1) Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Alors g est de classe C^∞ sur $] - R, R[$ et dérivable terme à terme, en tant que fonction développable en série entière, et on a :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in] - R, R[$, après un changement de variable adéquat :

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) n a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - 4 a_{n-1}) x^n + a_1 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - 4 a_{n-1}) x^n + a_1. \end{aligned}$$

Or g vérifie (**), donc : $\forall x \in] - R, R[, xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) = 0$. C'est-à-dire :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - 4 a_{n-1}) x^n + a_1 = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, on en déduit :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (n+1)^2 a_{n+1} - 4 a_{n-1} = 0, \end{cases}$$

d'où le résultat.

(2.2) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{4}{(n+2)^2} a_n, \end{cases} \quad (\dagger)$$

Nous allons en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_k : \ll a_{2k+1} = 0, a_{2k} = \frac{a_0}{(k!)^2}, \gg$$

par récurrence sur k (pour comprendre comment l'on conjecture ces valeurs, voir la remarque à la fin de la résolution de cette question).

Pour $k = 0$, on sait déjà qu'on a $a_{2 \times 0 + 1} = a_1 = 0$ d'après (\dagger) , tandis que l'égalité : $a_{2 \times 0} = a_0 = \frac{a_0}{(0!)^2}$ est triviale car $0! = 1$. D'où P_0 , ce qui initialise la propriété.

Montrons qu'elle est héréditaire : soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k . Alors :

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+1+2} \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{4}{(2k+1+2)^2} a_{2k+1} \stackrel{[P_k]}{=} \frac{4}{(2k+1+2)^2} \times 0 = 0,$$

et :

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{4}{(2k+2)^2} a_{2k} \stackrel{[P_k]}{=} \frac{4}{2^2(k+1)^2} \times \frac{a_0}{(k!)^2} = \frac{a_0}{((k+1)!)^2},$$

donc on a bien :

$$a_{2(k+1)+1} = 0, \quad a_{2(k+1)} = \frac{a_0}{((k+1)!)^2},$$

ainsi P_k implique P_{k+1} : on a montré l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{a_0}{(k!)^2} = \frac{1}{(k!)^2},$$

où on utilise l'hypothèse de l'énoncé : $a_0 = 1$. On peut écrire ce résultat alternativement ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{(\lfloor n/2 \rfloor!)^2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Remarque. Pour comprendre d'où viennent les expressions de a_{2k+1} et a_{2k} proposées dans P_k , on réitère la relation (†), d'abord avec $n = 2k - 1$ ou $n = 2k - 2$, puis $n = 2k - 3$ ou $n = 2k - 4$, etc., autant que possible, c'est-à-dire jusqu'à $n = 1$ ou $n = 0$ (selon qu'on parte de a_{2k+1} ou a_{2k}). En écrivant informellement le produit qui apparaît ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{(2k+1)^2} a_{2k-1} = \frac{4}{(2k+1)^2} \cdot \frac{4}{(2k-1)^2} a_{2k-3} \\ &= \frac{4}{(2k+1)^2} \cdot \frac{4}{(2k-1)^2} \times \cdots \times \frac{4}{1^2} \underbrace{a_1}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{4}{(2k)^2} a_{2k-2} = \frac{4}{(2k)^2} \cdot \frac{4}{(2k-2)^2} a_{2k-4} = \frac{4}{(2k)^2} \cdot \frac{4}{(2k-2)^2} \times \cdots \times \frac{4}{2^2} a_0 \\ &= \frac{4}{2^2 k^2} \cdot \frac{4}{2^2 (k-1)^2} \times \cdots \times \frac{4}{2^2} a_0 \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(k-1)^2} \times \cdots \times \frac{1}{1^2} a_0 \\ &= \frac{a_0}{(k \times (k-1) \times \cdots \times 1)^2} = \frac{a_0}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

Le raisonnement par récurrence plus haut est une rédaction plus soignée de cette réitération.

(2.3) La question posée revient à déterminer R , le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$. Pour cela, on utilise la règle de D'Alembert. Soit $x \in \mathbb{R}$ non nul. Alors $a_{2k} x^{2k} = \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est non nul pour tout $k \in \mathbb{N}$, et d'après (†) (avec $n = 2k$) on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{a_{2(k+1)} x^{2(k+1)}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} x^2 = \frac{4}{(2k+2)^2} x^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 < 1.$$

Par la règle de D'Alembert, la série $\sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$ converge (absolument, ce qu'on peut omettre puisque la série est à termes positifs) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc : $R = +\infty$. On en déduit que g est définie sur \mathbb{R} .

3. (3.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-2x \cos(t)) dt.$$

Effectuons le changement de variable $u = \pi - t$ dans cette intégrale. Ce changement de variable est licite, parce que l'application $t \mapsto \pi - t$ est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. On a : $du = -dt$, donc :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \exp(-2x \cos(\pi - u))(-du) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2x \cos(u)) du.$$

Or l'application $u \mapsto \exp(2x \cos(u))$ est 2π -périodique, donc d'après la question de cours (avec $x = -\pi$ et $T = 2\pi$), on a :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(u)) du = F(x),$$

ce qui démontre que F est une fonction paire.

(3.2)

3.2.1. L'application $(x, t) \mapsto 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ car polynomiale en x et t , tandis que $(x, t) \mapsto \cos(t)$ l'est en tant que composition :

- de $(x, t) \mapsto t$, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ en tant qu'application polynomiale, et à valeurs dans \mathbb{R} ;
- du cosinus qui est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Comme produit de fonctions de classe C^1 , l'application $(x, t) \mapsto 2x \cos(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, et à valeurs dans \mathbb{R} . Par composition avec la fonction exponentielle qui est de classe C^1 sur \mathbb{R} , l'application $h : (x, t) \mapsto \exp(2x \cos(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$: d'où le résultat.

3.2.2. Tout d'abord, pour tout $t \in [0, 2\pi]$ l'application $x \mapsto h(x, t)$ est clairement de classe C^∞ sur \mathbb{R} puisque le cosinus et l'exponentielle le sont, et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \quad \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (2 \cos(t))^k \exp(2x \cos(t)).$$

Par le même argument que dans la question précédente (on remplace simplement la classe C^1 par la continuité), $(x, t) \mapsto (2 \cos(t))^k$ et $(x, t) \mapsto \exp(2x \cos(t))$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, donc $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ l'est également en tant que produit de fonctions continues à valeurs réelles : d'où le résultat.

3.2.3. Posons : $I = [a, b]$, et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

- $[a, b] \times [0, 2\pi]$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 , comme on le démontre *via* la caractérisation séquentielle aisément (les inégalités larges $a \leq x_n \leq b$ et $0 \leq y_n \leq 2\pi$ étant conservées par passage à la limite) ;
- $[a, b] \times [0, 2\pi]$ est une partie bornée de \mathbb{R}^2 , puisque pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$ on a :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \leq \max(|a|, |b|) + 2\pi,$$

et le fait d'être borné ne dépend pas de la norme (\mathbb{R}^2 est de dimension finie).

Ainsi $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est continue sur $I \times [0, 2\pi]$, qui est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 qui est de dimension finie. Par le théorème des bornes atteintes, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est bornée sur $I \times [0, 2\pi]$. Il existe donc un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], \quad 0 \leq \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M_k.$$

D'où le résultat. On pouvait aussi démontrer, par des majorations explicites, que le réel $M_k = 2^k \exp(2 \max(|a|, |b|))$ convient.

3.2.4. En déduire que F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

3.2.5. Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique le théorème de dérivation C^k sous le signe intégrale. Vérifions ses hypothèses :

- pour tout $t \in [0, 2\pi]$, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^∞ comme on l'a vu, donc de classe C^k sur \mathbb{R} ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^j h}{\partial x^j}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, 2\pi]$, et donc également intégrable sur $[0, 2\pi]$ par continuité sur un segment ;
- pour tout segment I inclus dans \mathbb{R} , et tout $(x, t) \in I \times [0, 2\pi]$, on a d'après la question précédente :

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M_k, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $\varphi : t \mapsto M_k$ est continue (par morceaux) sur le SEGMENT $[0, 2\pi]$ en tant que fonction constante, donc elle y est intégrable.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation C^k sous le signe intégrale, l'application $F : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt$ est de classe C^k sur tout segment dans \mathbb{R} , donc sur \mathbb{R} ; ceci vaut pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On a de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) dt = \frac{2^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t))^k \exp(2x \cos(t)) dt.$$

3.2.6. Voir la question précédente.

(3.3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme nous allons le voir, il est utile de d'abord supposer x non nul. On a, d'après la question précédente :

$$xF''(x) = \frac{4x}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t))^2 \exp(2x \cos(t)) dt = \frac{4x}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin(t))^2) \exp(2x \cos(t)) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} xF''(x) &= \frac{4x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt - \frac{4x}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 \exp(2x \cos(t)) dt \\ &= 4xF(x) - \frac{4x}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 \exp(2x \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que cette dernière intégrale est égale à

$$F'(x) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \exp(2x \cos(t)) dt,$$

pour obtenir le résultat voulu. On y parvient *via* une intégration par parties, où :

- l'on intègre $t \mapsto \sin(t) \exp(2x \cos(t)) = \frac{2x \sin(t)}{2x} \exp(2x \cos(t))$, qui est continue sur $[0, 2\pi]$, et dont une primitive est $t \mapsto -\frac{\exp(2x \cos(t))}{2x}$ (c'est ici qu'il importe de supposer x non nul) ;
- l'on dérive $t \mapsto \sin(t)$, qui est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ et de dérivée $t \mapsto \cos(t)$.

D'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 \exp(2x \cos(t)) dt &= \left[-\sin(t) \frac{\exp(2x \cos(t))}{2x} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\exp(2x \cos(t))}{2x} \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2x} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) \cos(t) dt \\ &= \frac{2\pi F'(x)}{2 \cdot 2x}. \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus devient donc :

$$xF''(x) = 4xF'(x) - \frac{4x}{2\pi} \cdot \frac{2\pi F'(x)}{2 \cdot 2x} = 4xF'(x) - F'(x).$$

On a ainsi montré :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0.$$

Pour avoir le résultat y compris si $x = 0$, on peut soit faire un calcul direct (ce qui est facile : en 0, le membre de gauche vaut $F'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0$), soit invoquer un argument de continuité : si l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, elle reste vraie quand on prend la limite lorsque $x \rightarrow 0$, et le membre de gauche tend bien vers $0 \cdot F''(0) + F'(0) - 4 \cdot 0 \cdot F(0)$ par continuité de l'application $x \mapsto xF''(x) + F'(x) - 4xF(x)$ sur \mathbb{R} , et donc en 0. Ainsi F vérifie la relation (**).

4. (4.1) On a : $\forall x \in \mathbb{C}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$

(4.2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x \cos(t))^n}{n!} dt.$$

Justifions l'interversion de la somme et de l'intégrale, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, dont nous allons rappeler et vérifier les hypothèses. Posons :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 2\pi], \quad f_n(t) = \frac{(2x \cos(t))^n}{n!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue (par morceaux) sur \mathbb{N} . Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$, en montrant qu'elle converge normalement sur cet intervalle. On a :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 2\pi], \quad |f_n(t)| \leq \frac{(2|x|)^n}{n!}.$$

Cette majoration est indépendante de la variable t . Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leq \frac{(2|x|)^n}{n!}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(2|x|)^n}{n!}$ converge : il s'agit de la série exponentielle évaluée en $2|x|$, dont on sait qu'elle converge en tout nombre réel (et même complexe). Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0, 1]$, et sa somme est continue (par morceaux) puisqu'il s'agit de $t \mapsto \exp(2x \cos(t))$. Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{2\pi} f_n$ converge, et d'autre part :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x \cos(t))^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(2x \cos(t))^n}{n!} dt,$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n J_n}{2\pi \cdot n!} x^n,$$

d'où le résultat en posant $I_n = \frac{2^{n-1}J_n}{\pi n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autre démonstration. D'après la formule de Taylor appliquée à F (qui est de classe C^∞ sur \mathbb{R}), à l'ordre N en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^N \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} F^{(N+1)}(tx) dt,$$

avec : $\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) = \frac{2^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt$, d'après la question 3.2. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^N \frac{2^{n-1}J_n}{\pi \cdot n!} x^n + x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} F^{(N+1)}(tx) dt.$$

Il reste à montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} F^{(N+1)}(tx) dt$ tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, à x fixé, pour avoir le résultat voulu. Pour cela, on note que :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \left| F^{(N+1)}(tx) \right| \leq \frac{2^{N+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(u)|^{N+1} \exp(2tx \cos(u)) du \\ & \leq \frac{2^{N+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2|x|) du \\ & = 2^{N+1} \exp(2|x|), \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} F^{(N+1)}(tx) dt \right| \leq 2^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} dt = \frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées. Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} F^{(N+1)}(tx) dt = 0.$$

Par conséquent, quand $N \rightarrow +\infty$, la formule de Taylor donne bien, comme avec la première approche :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}J_n}{\pi \cdot n!} x^n.$$

(4.3) On a : $J_0 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$, et : $J_1 = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0$.

(4.4) Pour obtenir une relation entre les intégrales $J_n = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt$ et $J_{n-2} = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} dt$, nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant n . Plus précisément, pour obtenir l'exposant $n - 2$, nous allons :

- dériver l'application $t \mapsto (\cos(t))^{n-1}$, qui est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$, de dérivée $t \mapsto -(n-1)(\cos(t))^{n-2} \sin(t)$;
- intégrer l'application $t \mapsto \cos(t)$ qui est continue sur $[0, 2\pi]$; une primitive est $t \mapsto \sin(t)$.

La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$J_n = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = \left[\sin(t) \cdot (\cos(t))^{n-1} \right]_0^{2\pi} + (n-1) \int_0^{2\pi} \sin(t) \cdot (\cos(t))^{n-2} \sin(t) dt,$$

donc : $J_n = (n-1) \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} (\sin(t))^2 dt$. En utilisant la formule : $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on obtient :

$$J_n = (n-1) \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} dt - (n-1) \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n,$$

c'est-à-dire $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$, puis :

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}. \quad (\ddagger)$$

(4.5) Nous allons démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P_k : \ll J_{2k+1} = 0, J_{2k} = \frac{(2k)! \pi}{2^{2k-1} (k!)^2} \gg$$

par récurrence sur k . À la fin de cette question, vous trouverez en remarque comment on peut conjecturer ces deux égalités, ou les démontrer sans passer par une récurrence (ce qui rend la question précédente caduque).

L'initialisation a été faite dans la question 4.3. On y a trouvé que $J_{2 \times 0+1} = J_1 = 0$, tandis que $J_{2 \times 0} = J_0 = 2\pi = \frac{(2 \cdot 0)! \pi}{2^{2 \cdot 0 - 1} (0!)^2}$. D'où P_0 .

À présent, soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k . Montrons P_{k+1} . On a, d'après (\ddagger) avec $n = 2k + 3$:

$$J_{2(k+1)+2} = J_{2k+3} \stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{2k+2}{2k+3} J_{2k+1} \stackrel{[P_k]}{=} \frac{2k+2}{2k+3} \times 0 = 0,$$

et :

$$\begin{aligned} J_{2(k+1)} &= J_{2k+2} \stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{2k+1}{2k+2} J_{2k} \stackrel{[P_k]}{=} \frac{2k+1}{2(k+1)} \times \frac{(2k)! \pi}{2^{2k-1} (k!)^2} = \frac{2k+2}{2k+2} \times \frac{(2k+1)! \pi}{2^{2k} (k+1)(k!)^2} \\ &= \frac{(2k+2)! \pi}{2(k+1) \cdot 2^{2k} (k+1)(k!)^2} \\ &= \frac{(2(k+1))! \pi}{2^{2k+1} ((k+1)!)^2} \end{aligned}$$

d'où P_{k+1} . La propriété est donc héréditaire.

Par principe de récurrence, on a montré :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad J_{2k+1} = 0, \quad J_{2k} = \frac{(2k)! \pi}{2^{2k-1} (k!)^2}.$$

On peut l'écrire également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n! \pi}{2^{n-1} (\lfloor n/2 \rfloor!)^2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Remarque. Plus rapidement : on sait que F est une fonction paire, donc ses coefficients d'indice impair, dans son développement en série entière, sont nuls. On en déduit immédiatement, sans le moindre calcul, que $J_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. Pour trouver les expressions de J_{2k+1} et J_{2k} proposées dans P_k , on réitère la relation (\ddagger) , d'abord avec $n = 2k + 1$ ou $n = 2k$, puis $n = 2k - 1$ ou $n = 2k - 2$, etc., autant que possible, c'est-à-dire jusqu'à $n = 3$ ou $n = 2$ (selon qu'on parte de J_{2k+1} ou J_{2k}). En écrivant informellement le produit qui apparaît ainsi, on trouve :

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} J_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} J_{2k-3} = \dots = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \underbrace{J_1}_{=0} = 0,$$

et :

$$\begin{aligned}
 J_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} J_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} J_{2k-4} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} J_0 \\
 &= \frac{2k(2k-1)}{(2k)^2} \cdot \frac{(2k-2)(2k-3)}{(2k-2)^2} \times \cdots \times \frac{2}{2^2} J_0 \\
 &= \frac{(2k)!}{((2k) \cdot (2(k-1)) \times \cdots \times (2 \cdot 1))^2} J_0 \\
 &= \frac{(2k)!}{2^{2k} (k \cdot (k-1) \times \cdots \times 1)^2} J_0 \\
 &= \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} J_0,
 \end{aligned}$$

et comme $J_0 = 2\pi$, on retrouve bien l'égalité proposée dans P_k . Le raisonnement par récurrence plus haut est une rédaction plus soignée de cette réitération.

Autre démonstration. On a coutume de calculer des intégrales de puissances (ou produits) de fonctions trigonométriques par linéarisation. On peut procéder ainsi ici. En effet, d'après la formule d'Euler, puis la formule du binôme de Newton, on a :

$$J_{2k} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2k} dt = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \int_0^{2\pi} e^{itj} e^{-it(2k-j)} dt = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \int_0^{2\pi} e^{2it(j-k)} dt$$

Or, si $j \neq k$, alors : $\int_0^{2\pi} e^{2it(j-k)} dt = \left[\frac{e^{2it(j-k)}}{j-k} \right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{j-k} = 0$. Si $j = k$, alors : $\int_0^{2\pi} e^{2it(j-k)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Donc la somme ci-dessus devient, en conservant l'unique terme non nul correspondant à $j = k$:

$$J_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} 2\pi = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

On procède de même pour J_{2k-1} , en constatant qu'aucune exponentielle n'a un argument nul (car $2j - 2k - 1 = 0$ si et seulement si : $j = k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$: impossible), et donc que toutes les intégrales valent zéro :

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} \int_0^{2\pi} e^{it(2j-2k-1)} dt = 0.$$

(4.6) Grâce aux questions 4.2 et 4.5, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1} J_n}{\pi \cdot n!} x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k-1} J_{2k}}{\pi \cdot (2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{\pi \cdot (2k)!} \times \frac{(2k)! \pi}{2^{2k-1} (k!)^2} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2} = g(x),$$

donc : $F = g$.

Remarque. Il semble qu'il fût possible d'obtenir cette égalité bien plus tôt : on a en effet montré que F et g vérifient $(**)$ (une équation différentielle linéaire du second ordre) avec la même condition initiale : $F(0) = g(0) = 1$, et : $F'(0) = g'(0) = 0$. Le théorème de Cauchy linéaire en conclurait que $F = g$, par unicité. La raison pour laquelle on ne peut pas procéder si facilement (justifiant ainsi toutes les questions subsidiaires), et l'annulation du facteur de y'' en 0, dans $(**)$.

Exercice 4

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, par définition : $M^T M = I_n$. Mais un inverse (de matrice) à gauche est aussi un inverse à droite, donc : $M M^T = I_n$. On en déduit que $M^T \in O_n(\mathbb{R})$, en écrivant :

$$(M^T)^T M^T = M M^T = I_n.$$

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition : $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), M^T \in O_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $N \in O_n(\mathbb{R})$ est une autre matrice orthogonale, alors :

$$(MN)^T (MN) = N^T M^T M N \stackrel{[M \in O_n(\mathbb{R})]}{=} N^T \cdot I_n N = N^T N \stackrel{[N \in O_n(\mathbb{R})]}{=} I_n,$$

donc : $MN \in O_n(\mathbb{R})$, ce qui démontre que $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit matriciel : d'où le résultat.

Partie 1

2. (2.1) On a :

$$UV = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ -A & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}, \quad VU = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & 0_n \\ -\lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

- (2.2) Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs et le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, donc :

$$\det(UV) = \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_n - AB).$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned} \det(UV) &= \det(U) \det(V) = \det(V) \det(U) = \det(VU) = \det(\lambda I_n - BA) \det(\lambda I_n) \\ &= \lambda^n \det(\lambda I_n - BA). \end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda^n \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda).$$

Ceci vaut pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda).$$

Ainsi le polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ s'annule en tous les $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Cela lui fournit une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. On en déduit :

$$\chi_{AB} = \chi_{BA},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. La matrice $M^T M$ est symétrique et à coefficients réels, puisque en effet :

$$(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M.$$

Donc, par le théorème spectral, il existe une base de \mathbb{R}^n orthonormée et constituée de vecteurs propres de $M^T M$ (pour le produit scalaire usuel) : d'où le résultat.

4. On applique la formule du changement de base avec l'endomorphisme canoniquement associé à $M^T M$, pour passer de la base canonique à la base orthonormée de vecteurs propres qui existe d'après la question précédente. On obtient alors l'existence de D diagonale, et de P orthogonale, telles que : $M^T M = P D P^{-1}$ (la matrice P est orthogonale parce qu'il s'agit d'une matrice de passage entre deux bases orthonormées).

Or, en appliquant le même raisonnement que dans la question précédente et celle-ci, mais avec MM^T qui est aussi symétrique réelle, on a l'existence de D' diagonale, et de P' orthogonale, telles que : $MM^T = P'D'P'^{-1}$. Or les coefficients diagonaux de D' sont les valeurs propres de MM^T , et ceux de D sont les valeurs propres de $M^T M$, et la question 2.2 appliquée à $A = M$ et $B = M^T$ montre que MM^T et $M^T M$ ont même polynôme caractéristique, et donc mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités). On en déduit que, quitte à changer l'ordre des vecteurs propres (ce qui ne change pas le caractère orthonormé de la famille, et donc le caractère orthogonal de la matrice de passage), lorsqu'on applique la formule du changement de base entre la base canonique et une base orthonormée de vecteurs propres de MM^T , on peut supposer : $D' = D$. Ainsi :

$$M^T M = PDP^{-1}, \quad MM^T = P'DP'^{-1},$$

donc :

$$D = P^{-1}M^T M P, \quad D = P'^{-1}MM^T P'.$$

On en déduit : $P^{-1}M^T M P = P'^{-1}MM^T P'$, puis :

$$M^T M = PP'^{-1}MM^T P'P^{-1} = (P'P^{-1})^{-1}MM^T P'P^{-1}.$$

Posons : $R = P'P^{-1} = P'P^T$. Comme P et P' sont orthogonales, R l'est aussi, en tant que produit de matrices orthogonales (on utilise la question de cours), et on a montré ci-dessus qu'on a : $M^T M = R^{-1}MM^T R = R^T MM^T R$: d'où le résultat.

Partie 2

5. Soit $M \in S_n$. Alors, en prenant $Q = I_n$, la matrice Q est orthogonale et on a :

$$Q^T M Q = I_n^T \cdot M \cdot I_n = M = M^T,$$

la dernière égalité étant vraie parce que M est symétrique. On a donc bien : $M \in \Delta_n$. Ceci montre que S_n est inclus dans Δ_n .

6. Soient $A \in A_n$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Montrons : $Q^{-1}AQ \in A_n$. On a :

$$(Q^{-1}AQ)^T = Q^T A^T (Q^{-1})^T \stackrel{[Q \in O_n(\mathbb{R})]}{=} Q^{-1} A^T (Q^T)^T = Q^{-1} A^T Q \stackrel{[A \in A_n]}{=} Q^{-1}(-A)Q = -Q^{-1}AQ,$$

donc $Q^{-1}AQ$ est antisymétrique, ce qu'il fallait démontrer.

7. On utilise le fait que toute matrice soit somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : soient M_S symétrique et M_A antisymétrique telles que : $M = M_S + M_A$. Comme M_S est symétrique réelle, par le théorème spectral il existe $T \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que : $M_S = TDT^{-1}$. On a alors :

$$M = M_S + M_A = TDT^{-1} + M_A = T(D + T^{-1}M_A T)T^{-1}.$$

Posons : $A = T^{-1}M_A T$. D'après la question précédente, A est antisymétrique car M_A l'est et T est orthogonale, et on a bien : $M = T(D + A)T^{-1}$: d'où le résultat.

8. (8.1) Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Alors :

$$M^T M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix},$$

donc l'égalité $M^T M = I_2$ équivaut à : $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, c'est-à-dire : $\alpha = \pm 1, \beta = \pm 1$. On en déduit que les matrices orthogonales et diagonales d'ordre 2 sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(8.2) Prendre $W = I_2$ ou $W = -I_2$ ne peut pas marcher, puisque ces deux matrices donneraient : $W^T L W = L W^2 = L \neq L^T$ (sauf si $b = 0$). Il reste deux possibilités ; prenons $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors, pour toute matrice $L = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$, on a :

$$W^T L W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} = L^T,$$

ce qui répond à la question. Le choix $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aurait aussi marché.

(8.3) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On reprend les notations de la question 7. Montrons que $D + A$ est orthotransposable ; pour cela, on note qu'une matrice antisymétrique d'ordre 2 est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$, donc si l'on écrit A ainsi, et D sous la forme :

$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, avec $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, alors $D + A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$. Donc, d'après la question précédente, il existe une matrice W orthogonale telle que : $W^T (D + A) W = (D + A)^T$. Donc : $D + A = W (D + A)^T W^T$. En multipliant par T et T^{-1} , on a :

$$M = T(D+A)T^{-1} = TW(D+A)^T W^T T^{-1} = TW(T^{-1}MT)^T W^T T^{-1} = TWT^{-1}M^T TWT^{-1}.$$

Comme W est diagonale, on a : $W^T = W$. Donc : $M = TWT^{-1}M^T TWT^{-1}$. On en déduit que si l'on pose : $Q = TWT^{-1} = TWT^T$, alors Q est orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales (on note facilement qu'elle est également symétrique), et on a : $M = QM^T Q$, donc :

$$M^T = Q^{-1} M Q^{-1} = Q^T M Q^T = Q^T M Q.$$

Ceci montre que M est orthotransposable, et ce pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$: d'où le résultat.

9. (9.1) Soit $M \in \Delta_n$. Il existe donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que : $Q^T M Q = M^T$. En transposant cette égalité, on voit qu'on a aussi : $Q^T M^T Q = M$. Alors :

$$[M^T, M] = M^T M - M M^T = Q^T M Q Q^T M^T Q - Q^T M^T Q Q^T M Q = Q^T (M M^T - M^T M) Q.$$

Comme $Q^T = Q^{-1}$, cette égalité s'écrit aussi :

$$[M^T, M] = Q^{-1} (M M^T - M^T M) Q = Q^{-1} [M, M^T] Q,$$

donc $[M^T, M]$ est semblable à $[M, M^T]$.

(9.2) Soit $M \in \Delta_n$. D'après la question précédente, $[M^T, M]$ est semblable à son opposée, or des matrices semblables ont même déterminant. On en déduit :

$$\det([M^T, M]) = \det(-[M^T, M]) = (-1)^n \det([M^T, M]).$$

Or n est supposé impair, donc : $(-1)^n = -1$. Ainsi $\det([M^T, M])$ est égal à son opposé, ce qui impose : $\det([M^T, M]) = 0$. D'où le résultat.