CMP PSI Première épreuve de mathématiques (3h)

Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$, et (λ, X) un couple (valeur propre,vecteur propre) de S.
$(SX|X)$ vaut $\lambda\|X\|^2$, et c'est un réel positif. Donc, puisque $X \neq 0$, $\lambda \geq 0$.
Réciproquement, si toutes les valeurs propres de S sont des réels positifs, alors il existe une matrice diagonale Δ à éléments positifs et une matrice orthogonale P telle que $S = PDP^T$ (théorème spectral appliqué à la matrice symétrique réelle S), et, pour toute matrice colonne X,
$$(SX|X) = X^T P^T DPX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$
où $PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et les λ_i sont les éléments diagonaux de D (c'est-à-dire les valeurs propres de S).
Sur cette expression, on constate que $(SX|X) \geq 0$.
2. Si A et B sont deux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$), et t un réel de $[0,1]$, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T\left((1-t)A + tB\right)X = (1-t)X^TAX + tX^TBX \geq 0$ (resp. > 0) car les deux coefficients t et $1-t$ sont positifs, et au moins l'un d'eux l'est strictement. On en déduit que $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) est une partie convexe de $M_n(\mathbb{R})$.
L'opposée d'une matrice non nulle de $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) n'étant pas dans $S_n^+(\mathbb{R})$, ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^T$. Si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, on note $\delta = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$, et on constate que $A = S^2$ avec $S = P\delta P^T$.
Enfin, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ puisqu'elle est symétrique (on le vérifie facilement) et de valeurs propres strictement positives (ce sont les réels $\sqrt{d_i}$).
4. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente, et la définition de fonction convexe donnée en préambule valide l'inégalité pour $p = 2$.
Supposons alors que, pour un entier $p \geq 2$,
$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in I^p,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$
Soit alors $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in I^{p+1}$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$. On distingue deux cas :
• si $\lambda_{p+1} = 1$, alors, pour tout $i \leq p$ $\lambda_i = 0$, et on se ramène évidemment au cas $p = 1$.
• si $\lambda_{p+1} < 1$, alors $\mu := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 - \lambda_{p+1} > 0$, et $f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\mu y + \lambda_{p+1} x_{p+1}\right)$, où $y = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$.
Comme $\mu + \lambda_{p+1} = 1$, par convexité de f, il vient
$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \mu f(y) + \lambda_{p+1} x_{p+1},$$
puis, par hypothèse de récurrence, sachant que $\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$,
$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i).$$

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

5. D'après le théorème spectral, $M = PDP^T$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Tr}\,(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   Il s'agit donc de montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\dfrac{1}{n}}$ (comparaison des moyennes arithmétique et géométrique de n réels).
   On distingue deux cas :
   • si M est non inversible, alors l'un des λ_i est nul, et l'inégalité est évidente, les λ_i étant positifs ou nuls.
   • si M est définie positive, tous les λ_i sont > 0. On utilise alors l'indication de l'énoncé : $x \to -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car deux fois dérivable à dérivée seconde positive. Donc, d'après la question 4, et en prenant $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
   $$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i).$$
   En composant par l'exponentielle, croissante, et à l'aide des propriétés de celle-ci, on obtient l'inégalité souhaitée.

6. Puisque M est symétrique réelle, il existe P orthogonale et D diagonale telle que $M = PDP^T$.
   $\|M\|_2^2 = \mathrm{Tr}\,(M^TM) = \mathrm{Tr}\,(M^2) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$, M^2 et D^2 étant semblables. Donc si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (les λ_i sont les valeurs propres de M "comptées avec leur ordre de multiplicité"), $\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

7. On applique l'inégalité donnée aux réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Il vient :
   $$2\max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}\left(\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} - \det(M)^{\frac{1}{n}}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \det(M)^{\frac{1}{n}}\right)^2.$$
   Or $\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \det(M)^{\frac{1}{n}}\right)^2$ est la somme des carrés des coefficients de la matrice $D - \det(M)^{\frac{1}{n}} I_n$, et donc vaut $\|D - \det(M)^{\frac{1}{n}} I_n\|_2^2$, qui est aussi $\|M - \det(M)^{\frac{1}{n}} I_n\|_2^2$, comme on le vérifie facilement (les deux matrices sont orthogonalement semblables via P).
   Enfin, $\max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = \|M\|_2^2$, et, ce dernier nombre étant strictement positif (M étant non nulle par hypothèse) l'on obtient
   $$\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} - \det(M)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\|M - \det(M)^{\frac{1}{n}} I_n\|_2^2}{2n\|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8. D'après la question 3, il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
   Notons $\widetilde{B} = S^{-1}BS^{-1}$.
   Alors $\widetilde{B} \in S_n(\mathbb{R})$ et il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $\widetilde{B} = PDP^T$.
   Ainsi, $B = S\widetilde{B}S = SPD(SP)^T = QDQ^T$ en notant $Q = SP \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Enfin, $QQ^T = SPP^TS = S^2 = A$.
   Si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la matrice $\widetilde{B}$ est aussi symétrique définie positive. En effet, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $S^{-1}X \neq 0$ et $X^TS^{-1}BS^{-1}X = (S^{-1}X)^TBS^{-1}X > 0$.
   Donc les éléments diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de $\widetilde{B}$, sont des réels strictement positifs.

9. La fonction $t \mapsto \ln(1+e^t)$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{e^t}{1+e^t}$, et sa dérivée seconde est $t \mapsto e^t\left(\dfrac{1}{1+e^t} - \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}\right) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0$. Donc la fonction $t \mapsto \ln(1+e^t)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

10. On écrit $A = QQ^T$ et $B = QDQ^T$. Alors $\det(A+B) = \det(Q)^2 \det(I_n + D) = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^{n}(1+d_i)$ si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, et $\det(A) = \det(Q)^2$, $\det(B) = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^{n} d_i$.

    Il s'agit donc, puisque $\det(Q)^2 > 0$, de démontrer que $\left(\prod_{i=1}^{n}(1+d_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \prod_{i=1}^{n} d_i^{\frac{1}{n}}$, ou encore
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+d_i) \geq \ln\left(1 + \prod_{i=1}^{n} d_i^{\frac{1}{n}}\right).$$
    par croissance du logarithme. Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, les d_i sont tous strictement positifs, et on note $d_i = e^{a_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La convexité de la fonction étudiée à la question 9 et la propriété démontrée à la question 4 permettent alors de conclure :
$$\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + e^{a_i}\right).$$

11. Soit $t \in [0,1]$. Avec les mêmes notations que précédemment,
$$\det((1-t)A + tB) = \det(Q)^2 \det((1-t)I_n + tD) = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^{n}(1 - t + td_i), \text{ et}$$
$$\det(A)^{1-t}\det(B)^t = \det(Q)^2 \det(D)^t = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^{n} d_i^t.$$
    Il s'agit donc ici de montrer que $\prod_{i=1}^{n}(1 - t + td_i) \geq \prod_{i=1}^{n} d_i^t$.

    Or, par convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, pour tout réel a, $e^{(1-t).0+ta} \leq (1-t)e^0 + te^a$.
    Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e^{(1-t).0+t\ln(d_i)} \leq (1-t)e^0 + td_i$, ce qui justifie l'inégalité demandée.
    Pour l'extension à $S_n^+(\mathbb{R})$, deux méthodes :
    • On peut montrer que toute matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite de matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par passage à la limite dans l'inégalité démontrée, et sachant que le déterminant est une application continue sur $M_n(\mathbb{R})$, on obtient l'extension de cette inégalité aux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$.
    • On vient de considérer le cas où A et B sont symétriques définies positives. Si, maintenant, l'une des deux matrices A et B est symétrique positive non définie, alors elle admet 0 pour valeur propre, et donc son déterminant est nul. L'inégalité est alors évidente puisque $tA + (1-t)B$, symétrique positive d'après la question 2, est de déterminant positif. On obtient bien l'extension voulue.

12. Soient $(A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$, et $t \in [0,1]$. Les déterminants de A et de B sont strictement positifs, donc d'après l'inégalité de la question 11, le déterminant de $(1-t)A + tB$ est lui aussi strictement positif, et, par croissance du logarithme,
$$\ln\left(\det((1-t)A + tB)\right) \geq (1-t)\ln(\det(A)) + t\ln(\det(B)),$$
    ce qui prouve que la fonction $\ln \circ \det$ est concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie 4 : Encore de la convexité !

13. Soit t un réel. Si $A = P\Delta P^T$, où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $g(t) = \det(I_n + t\Delta) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i)$.
    Sur cette expression, on constate que g est une application polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14. Avec les notations précédentes, $f(t) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln(1 + t\lambda_i)$.

    Or, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, donc $f(t) \leq \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i = t\mathrm{Tr}\,(A)$.

Partie 5 : Et pour finir ... de la convexité !

15. On utilise encore le résultat de la question 8 : il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telles que $A = QQ^T$ et $M = QDQ^T$.

    Pour tout réel t, $f_A(t) = \det(Q)^2 \det(I_n + tD) = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^{n}(1 + td_i)$.

    Sur cette expression, on constate que f_A est une fonction polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

16. Avec les notations précédentes,

    $$\chi_{A+tM} = \det(XI_n - (A + tM)) = (\det(Q))^2 \det((X-1)I_n - tD) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^{n}(X - 1 - td_i).$$

    Les valeurs propres de $A + tM$ sont donc les réels $1 + td_i$, et elles sont toutes strictement positives SSI $t > -\dfrac{1}{d_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (les d_i étant strictement positifs puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

    Notons $\epsilon_0 = \dfrac{1}{\max\{d_1, \dots, d_n\}}$. Alors, pour tout $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

17. Deux façons :

    • (avec mémoire) On se rappelle ici (cf. solution de la question 8) que si $A = S^2$, $S^{-1}MS^{-1} = PDP^T$, où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc $\sum_{i=1}^{n} d_i = \mathrm{Tr}\,(D) = \mathrm{Tr}\,(S^{-1}MS^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1}M)$.

    Alors

    $$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(Q)^2 \det(I_n + tD) \\ &= \det(A) \prod_{i=1}^{n}(1 + td_i) \\ &= \det(A) \left(1 + t\sum_{i=1}^{n} d_i + \mathrm{o}(t)\right) \text{ quand } t \to 0 \\ &= \det(A) \left(1 + t\mathrm{Tr}\,(A^{-1}M) + \mathrm{o}(t)\right) \text{ quand } t \to 0. \end{aligned}$$

    • (sans mémoire) On utilise l'indication : si $A = I_n$, alors, en notant λ_i les valeurs propres de M, symétrique, on obtient

    $$f_{I_n}(t) = \det(I_n + tM) \underset{Q.13}{=} \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) t + \mathrm{o}(t) = 1 + \mathrm{Tr}\,(M)t + \mathrm{o}(t)$$

    C'est le résultat voulu dans ce cas particulier. Pour obtenir le cas général, on est tenté d'écrire $f_A(t) = \det(A)\det(I_n + tA^{-1}M)$ et d'utiliser ce qui précède... sauf que la matrice $A^{-1}M$ n'est plus symétrique a priori, donc n'est pas diagonalisable a priori : l'expression précédente ne peut pas servir directement. On peut néanmoins s'en sortir en prouvant le cas particulier de l'indication sans hypothèse de symétrie sur M, en utilisant que $M \sim_{\mathbb{C}} T$ avec T triangulaire : alors le même raisonnement est valable (le fait que les λ_i puissent être complexes ne change rien).
    Ainsi, on aura bien

    $$f_A(t) = \det(A)\det(I_n + tA^{-1}M) = \det(A)\left(1 + \mathrm{Tr}\,(A^{-1}M)t + \mathrm{o}(t)\right) \text{ quand } t \to 0$$

18. Là encore, deux façons :

    • (façon extrinsèque) Lorsque $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, $1 + td_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

    Puisque $f_A(t) = \det(A) \prod_{i=1}^{n}(1 + td_i)$, $f_A'(t) = \det(A) \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j \neq i}(1 + td_j) = f_A(t) \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d_i}{1 + td_i}$.

    • (façon intrinsèque) On fixe $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$. Notons alors, pour tout h assez petit, $g(h) := f_A(t+h) = \det((A + tM) + hM)$. Alors, $A + tM$ étant dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, le calcul de développement limité de la question précédente s'applique : on obtient alors

    $$f_A'(t) = g'(0) = \det(A + tM)\mathrm{Tr}\,\left((A + tM)^{-1}M\right) = f_A(t)\mathrm{Tr}\,\left((A + tM)^{-1}M\right)$$

19. Puisque la fonction $\Phi\ :\ t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, elle est dérivable en 0 et admet le développement limité $\Phi(t) = \Phi(0) + t\Phi'(0) + \mathrm{o}(t)$ quand $t \to 0$.
    Or $\Phi(0) = A^{-1}$ et, en dérivant l'égalité $\Phi(t)(A + tM) = I_n$ (dérivable par bilinéarité du produit matriciel), on obtient, pour tout $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, $\Phi'(t)(A + tM) + \Phi(t)M = 0$, et donc $\Phi'(0) = -A^{-1}MA^{-1}$.
    On en déduit que

    $$\Phi(t) = A^{-1} - t\ A^{-1}MA^{-1} + o(t) \text{ quand } t \to 0.$$

20. Pour tout $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, $f_A(t) = \det(A + tM) > 0$, donc l'application φ_α est bien définie sur $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$. Comme composée de $x \mapsto x^{-\alpha}$ et de f_A, elle est de classe C^∞ sur cet intervalle.
    Pour tout $t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha'(t) &= \frac{1}{\alpha} \times (-\alpha) \times \det(A+tM)^{-\alpha-1} \times f_A'(t) \\
&= -\det(A+tM)^{-\alpha} \frac{f_A'(t)}{f_A(t)}
\end{aligned}
$$

Il reste donc juste à prouver que $\dfrac{f_A'(t)}{f_A(t)} = \mathrm{Tr}\,\big((A+tM)^{-1}M\big)$. Le calcul de $f_A'(t)$ étant le sujet de la question 18, et celle-ci ayant deux solutions, on distingue suivant celle choisie :

• (façon extrinsèque) : on a obtenu $f_A'(t) = f_A(t) \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1+td_i}$. Or avec les notations adoptées dans cette partie,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,((A+tM)^{-1}M) &= \mathrm{Tr}\,\left(\left(QQ^T + tQDQ^T\right)^{-1} QDQ^T\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left((Q^T)^{-1}\left(I_n+tD\right)^{-1} Q^{-1}QDQ^T\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\big((I_n+tD)^{-1}D\big) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1+td_i}.
\end{aligned}
$$

• (façon intrinsèque) On a obtenu directement que $f_A'(t) = f_A(t)\mathrm{Tr}\,\big((A+tM)^{-1}M\big)$

Dans tous les cas, on en déduit que

$$
\forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[,\ \varphi_\alpha'(t) = -\mathrm{Tr}\,((A+tM)^{-1}M)\det{}^{-\alpha}(A+tM).
$$

21. On effectue un développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ_α' en utilisant les deux questions précédentes :

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha'(t) &= -\mathrm{Tr}\,\big(\big(A^{-1} + t\ A^{-1}MA^{-1} + o(t)\big)\,M\big)\,\alpha\varphi_\alpha(t) \\
&= -\mathrm{Tr}\,\big(\big(A^{-1}M + t\ A^{-1}MA^{-1}M + o(t)\big)\,\big(\det(A)^{-\alpha}(1-\alpha t\mathrm{Tr}\,(A^{-1}M) + \mathrm{o}(t)\big) \\
&= -\det(A)^{\alpha}\mathrm{Tr}\,(A^{-1}M) + t\,\big(\mathrm{Tr}\,((A^{-1}M)^2) + \mathrm{Tr}\,(A^{-1}M)^2\big) + \mathrm{o}(t) \text{ quand } t \to 0,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que

$$
\varphi_\alpha''(0) = \det{}^{-\alpha}(A)\,\big(\alpha(\mathrm{Tr}\,(A^{-1}M))^2 + \mathrm{Tr}\,((A^{-1}M)^2)\big).
$$

22. Deux façons :
• $A^{-1}M = (QQ^T)^{-1}QDQ^T = (Q^T)^{-1}Q^{-1}QDQ^T = (Q^T)^{-1}DQ^T$, donc $A^{-1}M$ est semblable à la matrice diagonale D.
• en utilisant l'indication : la matrice A^{-1} étant symétrique définie positive, il existe d'après la question 3 une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = B^2$. Alors, on a $A^{-1}M = B^2M = B(BMB)B^{-1} \sim BMB$, et cette dernière matrice est symétrique.

23. $A^{-1}M$ et $(A^{-1}M)^2$ sont alors respectivement semblables à T et T^2, avec $T \in S_n(\mathbb{R})$, elle-même semblable à une matrice $E = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_n)$ d'après le théorème spectral. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha''(0) &= \det{}^{-\alpha}(A)\,\big(\alpha(\mathrm{Tr}\,(A^{-1}M))^2 + \mathrm{Tr}\,((A^{-1}M)^2)\big) \\
&= \det{}^{-\alpha}(A)\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2\right) \\
&= \det{}^{-\alpha}(A)\left(-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2\right).
\end{aligned}
$$

Notons sans imagination $x = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2 &\geq -\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n |e_i|\right)^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2 \\
&= \frac{1}{n}\left(n\mathrm{N}_2(x)^2 - \mathrm{N}_1(x)^2\right) \\
&\geq 0 \text{ par comparaison des normes standards sur } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\varphi_\alpha''(0) \geq 0$.

24. Par continuité de φ_α'', si $\varphi_\alpha''(0) > 0$, alors il existe $0 < \eta < \epsilon_0$ tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$, $\varphi_\alpha''(t) > 0$, et la fonction φ_α' est croissante sur l'intervalle $]-\eta, \eta[$ (autrement dit φ_α est convexe sur cet intervalle).
Or l'inégalité à démontrer s'écrit $\varphi_\alpha(0) - \varphi_\alpha(t) \leq -t\varphi_\alpha'(0)$ pour tout $t \in]-\eta, \eta[$.
Soit $t \in [0, \eta[$. D'après la formule des accroissements finis, il existe $c \in]0, t[$ tel que $\varphi_\alpha(0) - \varphi_\alpha(t) = -t\varphi_\alpha'(c) \leq -t\varphi_\alpha'(0)$.
Si maintenant $t \in]-\eta, 0]$, il existe $c \in]t, 0[$ tel que $\varphi_\alpha(0) - \varphi_\alpha(t) = -t\varphi_\alpha'(c) \leq -t\varphi_\alpha'(0)$.
On a démontré l'inégalité dans tous les cas.