

M.SAADAoui (IBN TAYMIA MARRAKECH)

1. (a) D'après le formule du rang , on a $\dim Ker(\pi) + \dim Im \pi = \dim E$, d'autre part , pour tout $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - \pi(x)}_{\in Ker(\pi)} + \underbrace{\pi(x)}_{\in Im(\pi)}$, donc $E = Ker(\pi) \oplus Im(\pi)$.
 - i. Soit $x \in E$, on a $x - \pi(x) \in Ker(\pi) = (Im \pi)^\perp$ (Car π est un projecteur orthogonal) , donc d'après le théorème de Pythagore , on a : $\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2$. L'égalité à lieu si et seulement si $x = \pi(x)$ c'est-à-dire si et seulement si $x \in Im(\pi)$.
 - ii. On a $\langle \pi(x), x \rangle = \langle \pi(x), x - \pi(x) + \pi(x) \rangle = \underbrace{\langle \pi(x), x - \pi(x) \rangle}_{=0} + \langle \pi(x), \pi(x) \rangle = \|\pi(x)\|^2 \geq 0$. L'égalité à lieu si et seulement si $\pi(x) = 0$ c'est-à-dire $x \in Ker(\pi)$.
- (b) Soit π un projecteur (donc π^* est aussi un projecteur)
 - Supposons que $\pi = \pi^*$, alors $Ker(\pi) = Ker(\pi^*) = (Im \pi)^\perp$, donc π est orthogonal
 - Supposons que π est orthogonal , alors , pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle x - \pi(x), \pi(y) \rangle = 0$, donc $\langle x, \pi(y) \rangle = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle$ et par symétrie , $\langle \pi(x), y \rangle = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle$. Par suite $\langle x, \pi(y) \rangle = \langle \pi(x), y \rangle$, donc $\pi = \pi^*$.

2. (a) Si π est un projecteur et $\mathcal{B}$ une base orthonormée , $M = mat_{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $mat_{\mathcal{B}}(\pi^*) = {}^t M M$ étant la matrice d'un projecteur , donc $Tr(M) = 1$, c'est -à-dire $a + d = 1$, π est un projecteur orthogonal si et seulement si ${}^t M = M$ et $M^2 = M$. ce qui est équivalent à : $b = c$ et , $\begin{pmatrix} bc + a^2 & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ce qui est équivalent à $b = c$, $a^2 + b^2 = a$, $(a + d)b = b$ et $c(a + d) = c$ et $b^2 + d^2 = d$. Les égalités précédentes sont alors équivalentes à $b = c$, $b^2 = a(1 - a)$, $c(a + d) = c$ et $b^2 = d(1 - d)$ cette dernière est vérifiée $d(1 - d) = (1 - a)a$.

- (b) $a(1 - a) = b^2 \geq 0$, donc $a \in [0, 1]$.

- (c) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, alors $b^2 = a(1 - a) = 0$, donc $b = 0$, dans ce cas $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc diagonalisable

Si $a \neq 0$, $\chi_N = X(X - a)$, est scindé à racines simples , donc N est diagonalisable .

- (d) On a $E = Ker(\pi_1) \oplus Im(\pi_1)$. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée adaptée à cette décomposition , alors la matrice de $M_1 = mat_{\mathcal{B}}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée , donc , il existe $a \in [0, 1]$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a(1 - a)$ et $M_2 = mat_{\mathcal{B}}(\pi_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix}$ $Mat_{\mathcal{B}}(\pi_1 \circ \pi_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (d'après la question précédente) , de plus le spectre de $\pi_1 \circ \pi_2$ est $\{0, a\}$ donc inclu dans $[0, 1]$.

3. (a) π_i étant des projecteurs orthogonaux , donc $\pi_i^* = \pi_i$, donc

$$(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1^* \circ \pi_2^* \circ \pi_1^* = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$$

$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est un endomorphisme symétrique , donc diagonalisable . D'après 1°) (b) .i , on a

$$\|(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)(x)\| = \|\pi_1(\pi_2(\pi_1(x)))\| \leq \|\pi_2(\pi_1(x))\| \leq \|\pi_1(x)\| \leq \|x\|$$

Si λ est une valeur de $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi(x) = \lambda x$, donc $|\lambda| \|x\| \leq \|x\|$. D'autre part , Par suite $\lambda \in [-1, 1]$.

(b) $\langle x, \pi(x) \rangle = \langle \pi_1(x), \pi_2(\pi_1(x)) \rangle \geq 0$ (d'après 1°) (b).ii) , donc π est positif par suite son spectre est contenu dans $[0, 1]$.

(c) π_1 et $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ commutent , donc $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

(d) On a $\pi_1(E) \subset E$, donc $\pi_1 \circ \pi_2(\pi_1(E)) \subset \pi_1(E)$, c'est-à-dire $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2$.
On a pour tout $x \in \text{Im}(\pi_1)$, $\pi_1(x) = x$, donc $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x)$. Ainsi sur $\text{Im} \pi_1$, on a $\pi|_{\text{Im}(\pi_1)} = (\pi_1 \circ \pi_2)|_{\text{Im}(\pi_1)}$.

D'autre part π est diagonalisable et $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par π , donc $\pi|_{\text{Im}(\pi_1)} = (\pi_1 \circ \pi_2)|_{\text{Im}(\pi_1)}$ est diagonalisable , et puisque le spectre de $(\pi_1 \circ \pi_2)|_{\text{Im}(\pi_1)}$ est inclu dans le spectre de π , donc le spectre de $(\pi_1 \circ \pi_2)|_{\text{Im}(\pi_1)}$ est inclu dans $[0, 1]$.

(e) On a $\pi_i^* = \pi_i$, donc

$$G^\perp = (\text{Im}(\pi_1) + \text{Ker}(\pi_2))^\perp = \text{Im}(\pi_1)^\perp \cap \text{Ker}(\pi_2)^\perp = \text{Ker}(\pi_1^*) \cap \text{Im} \pi_2^* = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im} \pi_2$$

Pour $x \in G^\perp$, π_2 étant un projecteur , donc , pour tout $x \in \text{Im}(\pi_2)$, $\pi_2(x) = 0$, ce qui donne que : $(\pi_1 \circ \pi_2)(x) = \pi_1(x) = 0$ (car $x \in G^\perp = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im} \pi_2$).

(f) Soit $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r_2})$ une base orthonormée de $\text{Im}(\pi_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_{r_2+1}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $\text{Ker}(\pi_2)$, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de E , et on a $\pi_2(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, r_2\}$ et $\pi_2(\varepsilon_i) = 0$ pour $r_2 < i \leq n$, donc :

$$\text{Tr}(\pi_2 \circ \pi_1) = \sum_{i=1}^n \langle (\pi_2 \circ \pi_1)(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \pi_1(\varepsilon_i), \pi_2^*(\varepsilon_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \pi_1(\varepsilon_i), \pi_2(\varepsilon_i) \rangle = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle$$

D'autre part , on a $\|\pi_i(x)\| \leq \|x\|$, donc

$$\langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle \leq \|\pi_1(\varepsilon_i)\| \|\varepsilon_i\| \leq 1$$

Par suite $\text{Tr}(\pi_2 \circ \pi_1) \leq r_2$.

Si l'égalité à lieu , alors , pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r_2\}$, $(\pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i) = 1 = \|\varepsilon_i\|$, donc d'après la question 1°) (b). on a $\varepsilon_i \in \text{Im}(\pi_1)$ pour $i \in \{1, 2, \dots, r_2\}$, par suite $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$

Réciproquement si $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$ alors $\text{Tr}(\pi_2 \circ \pi_1) = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = r_2$

Exercice II

1. (a) $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,0_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AE+B \\ C & CE+D \end{pmatrix}$

(b) On prend $E = -A^{-1}B$, donc $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$

Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ étant triangulaires par blocs , donc

$$\det \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$$

Ce qui donne que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$.

2. (a) D'après la question précédente , on a $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. D'autre part $AC = CA$, donc $\det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB)$

- (b) i. On a $\chi_{M_{A,B,C,D}} = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D - \lambda I_n \end{pmatrix}$. Notons $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de A , on a pour tout $\lambda \notin Sp(A)$, $A - \lambda I_n$ est inversible de plus $A - \lambda I_n$ et C commutent, donc d'après la question précédente, on a : $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D - \lambda I_n \end{pmatrix} = \det [(A - \lambda I_n)(D - \lambda I_n) - CB] = \det (\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ où $V = AD - CB$ et $U = -(A + D)$. D'autre part $\lambda \mapsto \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) - \det (\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ est une fonction polynôme qui admet une infinité de racine, donc nulle, par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det (\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$

- ii. Pour $\lambda = 0$, on obtient $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(V) = \det(AD - CB)$.

$$3. S = \begin{pmatrix} I_n & B \\ {}^t B & I_n \end{pmatrix}$$

- (a) ${}^t({}^t B B) = {}^t B {}^t({}^t B) = {}^t B B$ et $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^t X S X = \|BX\|^2 \geq 0$. S étant symétrique réelle positive, donc ses valeurs propres sont toutes réelles ou positives.
- (b) D'après la question précédente, on a :

$$\chi_S = \det ((\lambda^2 - 2\lambda + 1) I_n - {}^t B B) = \det ({}^t B B - (\lambda - 1)^2 I_n) = \chi_{{}^t B B}((\lambda - 1)^2)$$

- (c) Supposons que T est définie positive, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre associée à T et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $TX = \lambda X$, On a ${}^t X T X > 0$, donc $\lambda \|X\|^2 > 0$, ce qui donne que $\lambda > 0$.

Supposons que les valeurs propres de T sont toutes strictement positive. T étant symétrique, donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ diagonale telle que ${}^t P T P = D$.

On a alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, posons $Y = {}^t P X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Y \neq 0$ car $X \neq 0$.

$${}^t X T X = ({}^t X P) D ({}^t P X) = {}^t Y D Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0.$$

- (d) On a S est symétrique positive, notons $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de ${}^t B B$, (on a $\mu_i \geq 0$ car ${}^t B B$ est symétrique positive).

alors : λ est une valeur propre de $S \Leftrightarrow \chi_S(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{{}^t B B}((\lambda - 1)^2) \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ ce qui est équivalent à $\lambda \in \{1 + \sqrt{\mu_1}, \dots, 1 + \sqrt{\mu_n}, 1 - \sqrt{\mu_1}, \dots, 1 - \sqrt{\mu_n}\}$

Donc $Sp(S) = \{1 + \sqrt{\mu_1}, \dots, 1 + \sqrt{\mu_n}, 1 - \sqrt{\mu_1}, \dots, 1 - \sqrt{\mu_n}\}$.

Ainsi S est définie positive si et seulement si son spectre est inclu dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est équivalent à, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sqrt{\mu_i} < 1$ c'est-à-dire $0 \leq \mu_i < 1$.

4. Remarquons d'abord que A_n est une matrice de taille 2^{n+1} , $n \geq 1$. D'après la question 2°, on a $\det(A_n) = \det(-3A_{n-1}) = (-3)^{2^n} \det(A_{n-1}) = 3^{2^n} \det(A_{n-1})$. Par récurrence $\det(A_n) \neq 0$.

- (a) On a $\frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} = 3^{2^k}$, donc $\prod_{k=2}^n \left(\frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} \right) = \prod_{k=2}^n 3^{2^k} = 3^{2^2 + \dots + 2^n}$, donc

$$\det(A_n) = 3^{2^2 + \dots + 2^n} \det(A_2) = -3^{2^2 + 2^2 + \dots + 2^n} = -3^{2^{n+1} - 2^n}$$

- (b) D'après la question 2°, on a :

$$\chi_{A_n} = \det(\lambda^2 I_{2^n} - 3A_{n-1}^2) = \det(3A_{n-1}^2 - \lambda^2 I_{2^n}) = 3^{2^{n+1}} \det\left(A_{n-1}^2 - \frac{\lambda^2}{3} I_{2^n}\right)$$

Donc $\chi_{A_n} = 3^{2^{n+1}} \det \left(A_{n-1} - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^n} \right) \times \det \left(A_{n-1} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^n} \right) = 3^{2^n} \chi_{A_n} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} \right) \times \chi_{A_n} \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{3}} \right)$

λ est une valeur propre de A_n si et seulement si $\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ est une valeur propre de A_{n-1} .

Les valeurs propres de A_1 sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, donc les valeurs propres de A_2 sont $-3, 3$, puis par récurrence les valeurs propres de A_n sont $(\sqrt{3})^n, -(\sqrt{3})^n$.

Exercice III

1. (a) OB diamètre du cercle $\mathcal{C}$, donc $(ON_t B)$ est rectangle en N_t .

(b) $\Omega \left(0, \frac{1}{2} \right)$ étant le centre du cercle et $R = \frac{1}{2}$ est le rayon du cercle $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ pour équation :

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \text{ soit } x^2 - x + y^2 = 0$$

$\mathcal{D}'$ à pour équation $y = 1$.

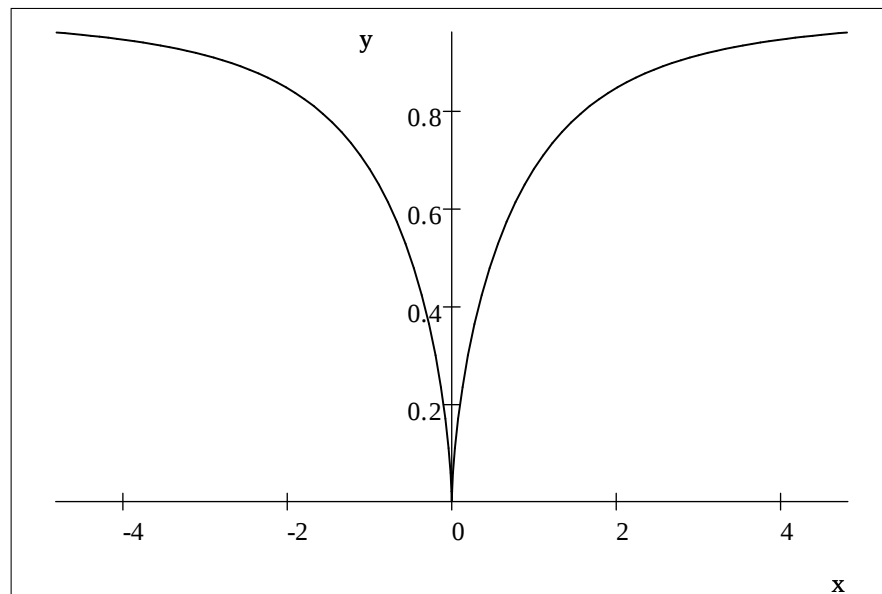
(c) Notons (x, y) les coordonnées de N_t , on a alors $M_t = (t, 1)$, l'équation de la droite (OM_t) est $y = \frac{1}{t}x$. $N_t \in (OM_t)$, donc $y = \frac{x}{t}$. D'autre part $N_t \in \mathcal{C}$, donc $x^2 - \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} = 0$, ce qui donne que $x = \frac{t}{1+t^2}$ puis $y = \frac{1}{1+t^2}$.

(d) $\overrightarrow{N_t M_t} = \left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right)$.

2. (a) $x(t) = \frac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$, donc $y = 1$ est asymptote à la courbe Γ .

$$\left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right)$$



(b) $P_t = \left(x(t) = \frac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \right)$, on a $x(t) = t^3 + o(t^3)$ et $y(t) = t^2 + o(t^3)$, donc $\overrightarrow{OP_t} = t^2 V_1 + t^3 V_2 + o(t^3)$ où $V_1 = (0, 1)$ et $V_2 = (1, 0)$. O est donc un point de rebroussement de première espèce.

(c) Pour $t \geq 0$, la partie de la courbe définie par : $x(t) = \frac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ admet pour équation cartésienne : $x = y\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $0 \leq y < 1$, (En effet $y = \frac{t^2}{t^2+1}$ donne que $t = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, donc $x = ty = y\sqrt{\frac{y}{1-y}}$). Ainsi la domaine D dont on veut calculer l'aire est défini par :

$$0 \leq y < 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y\sqrt{\frac{y}{1-y}} = \varphi(y)$$

L'aire cherchée est alors égale à $\mathcal{A}(D) = \int_0^1 \int_0^{\varphi(y)} dx dy = \int_0^1 y\sqrt{\frac{y}{1-y}} dy$. Posons $t = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, donc $y = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dy = \frac{2t dt}{(1+t^2)^2}$, donc $\mathcal{A}(D) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^4 dt}{(1+t^2)^4} = \frac{\pi}{16}$.

3. (a) On a $z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, donc $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}$, ce qui donne que $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$.

(b) On a $U_t = \sigma(P_t)$ donc $\overrightarrow{OU_t} = \frac{\overrightarrow{OP_t}}{\|\overrightarrow{OP_t}\|^2} = (t, 1) = M_t$.

(c) L'image de Γ par σ est $\mathcal{D}'$.