SOLUTION DE MINES 2001 MP-II

I.1.a Soit $\Omega_h = \{(x,y) \in I^2 \ / \ |x-y| \leq h\}$. Comme φ est bornée, l'ensemble des $|\varphi(x)-\varphi(y)|$ avec $(x,y) \in \Omega_h$ est majoré par $2\sup\limits_I |\varphi|$, donc $\omega_\varphi(h)$ existe.

De plus si $h \leq h'$, comme $\Omega_h \subset \Omega_{h'}$, on a $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$.

1.b Soit $(x,y) \in \Omega_{h+h'}$; supposons par exemple que $x<y$; et posons $z = x+h$; alors $(x,z) \in \Omega_h$ et $(z,y) \in \Omega_{h'}$, et comme $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |\varphi(x)-\varphi(z)| + |\varphi(z)-\varphi(y)|$, on obtient $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h')$.

On en déduit (récurence facile sur n) : $\omega_\varphi(nh) \leq n\omega_\varphi(h)$.

Soit $\lambda > 0$ et $n = E(\lambda)$; alors $\lambda h \neq (n+1)h$ d'où $\omega_\varphi(\lambda h) \leq \omega_\varphi[(n+1)h]$ (croissance de ω_φ).
D'où $\omega_\varphi(\lambda h) \leq (n+1)\omega_\varphi(h)$ et CQFD puisque $n \leq \lambda$.

1.c Il est clair que l'unif.continuité de φ est équivalente à la propriété : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \omega_\varphi(\delta) \leq \varepsilon$.
Laquelle est équivalente à $\omega_\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$ puisque la fonction ω_φ décroît.

1.d Découle immédiatement de l'inég. des acc.finis.

I.2.a La condition signifie que λ_n doit être égal au carré de la norme (au sens de $\mathcal{D}$) du polynome trigo nF_n; d'après Parseval, $\lambda_n = \sum\limits_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)^2$, donc $\lambda_n = n^2 + 2\sum\limits_{p=1}^{n-1} p^2$. D'où $\boxed{\lambda_n = n^2 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{3} = \dfrac{2n^2+1}{3}}$

Et donc $\boxed{\lambda_n \sim \dfrac{2}{3}n^3}$

2.b Quand $t \to 0$, $\alpha(t) = \dfrac{(t-\sin t)(t+\sin t)(t^2+\sin^2 t)}{t^4 \sin^4 t} \sim t^3/6.2t.2t^2.t^{-8}$, donc $\boxed{A_1 = 2/3}$

$\beta(t) = t^3\alpha(t)$ prolongée en 0 par $\beta(0)=0$ est donc continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée.

Dans I_n et J_n, on fait le chgmt de variable $u = nt$; les fonctions $g_p : u \mapsto \dfrac{\sin^4 u}{u^p}$ (avec $p = 2$ ou 3) prolongées par $g_p(0) = 0$, sont continues sur $[0,\infty[$ et dominées par $1/t^p$ (avec $p>1$), donc sont $[0,\infty[$-intégrables. Donc $I_n = n^2 \int_0^{n\pi/2} g_3 \sim n^2 \int_0^\infty g_3$. Et $J_n \leq A_2 n \int_0^{n\pi/2} g_2 \leq A_2 n \int_0^\infty g_2$.

2.c Comme K_n est paire, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} k_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi K_n = 1$

En posant $t = 2u$, on a $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi tK_n(t)dt = \dfrac{4}{\pi\lambda_n}\int_0^{\pi/2} (\sin nt)^4 (t\alpha(t) + \dfrac{1}{t^3})dt = \dfrac{4}{\pi\lambda_n}(I_n+J_n)$.

Or $I_n + J_n = O(n^2)$ et $\lambda_n = O(n^3)$. Donc $\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi tK_n(t)dt = O(1)$, c.a.d est bornée. En outre, sa positivité est évidente.

3.a Comme g est paire, $j_n(g)(-\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta+t)K_n(t)dt$
Et en posant $u = -t$, il vient $j_n(g)(-\theta) = j_n(g)(\theta)$ grâce à la parité de K_n.

Comme $t \mapsto g(\theta - t)K_n(t)$ est de période 2π, $j_n(g)(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} g(\theta-t)K_n(t)dt$.

On pose alors $u = \theta - t$, d'où $j_n(g)(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi} \pi g(u)K_n(\theta-u)du$. Or $K_n(\theta-u)$ est proportionnel à $F_n^2(\theta-u)$, donc de la forme $\sum\limits_{-2n+2}^{2n-2} c_k(u)e^{ik\theta}$, d'où $j_n(g)(\theta) = \sum\limits_{-2n+2}^{2n-2} \gamma_k e^{ik\theta}$.

Enfin la parité donne $j_n(g)(\theta) = \frac{1}{2}[j_n(g)(\theta) + j_n(g)(-\theta)] = \sum\limits_{k=0}^{2n-2} \gamma'_k \cos(k\theta)$.

3.b Par définition de $\omega_g(|t|)$, on a $|g(\theta-t)-g(\theta)| \leq \omega_g(|t|)$ et le I.1.b (avec $h = 1/n$ et $\lambda = n|t|$) donne $|g(\theta-t)-g(\theta)| \leq (1+n|t|)\ \omega_g(1/n)$.

Comme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n = 1$, on a :

$$|g(\theta) - j_n(g)(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - t) - g(\theta)|K_n(t)dt \leq \omega_g(1/n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + n|t|)K_n(t)dt \leq M_0\omega_g(1/n)$$

I.4.a D'après 3.b, $j_{p+1}(g)(\theta)$ est une comb.lin. des $\cos(k\theta)$ avec $k = 0..2p$, donc $P_n(x)$ est comb.lin. des polynomes $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ (avec $k = 0..2p$). Comme $2p \leq n$, P_n est un polynome de degré au plus égal à n.

4.b Comme P_n est un polynome de degré $\leq n$, $\Delta_n(f) \leq \|f - P_n\|$; en posant $g(\theta) = f(\cos\theta)$, on a $\|f - P_n)\| = \sup_{\mathbb{R}} |g(\theta) - j_{p+1}(g)| \leq M_0\omega_g(\frac{1}{p+1})$. Comme $\frac{1}{p+1} \leq \frac{2}{n}$ et comme ω_g est croissante, $\|f - P_n\| \leq M_0\omega_g(2/n)$. D'où avec 1.b, $\omega_g(2/n) \leq 2\omega_g(1/n)$.

Enfin $\omega_g(1/n) \leq \omega_f(1/n)$: en effet,
si $|\theta - \theta'| \leq 1/n$, alors $|\cos\theta - \cos\theta'| \leq 1/n$ (acc.finis), donc $|g(\theta) - g(\theta')| \leq \omega_f(1/n)$.

4.c Les espaces affines $f + \mathbf{E}_n$ et $(f - Q) + \mathbf{E}_n$ sont confondus. Donc $\Delta_n(f - Q) = \Delta_n(f)$

En introduction, on a admis l'existence d'un $R \in \mathbf{E_{n-1}}$ tel que $\Delta_{n-1}(f') = \|f' - R\|$. Soit Q une primitive de R; alors $\|f' - Q'\| = \Delta_{n-1}(f')$. Or, d'après 4.b et 1.d, on a $\Delta_n(f - Q) \leq \frac{2M_0}{n}\|f' - Q'\|$. Ce qui donne $\Delta_n(f) \leq \frac{2M_0}{n}\Delta_{n-1}(f')$.

4.d Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si $n > k+1$, alors $\Delta_n(f) \leq \frac{(2M_0)^k}{n(n-1)..(n-k+1)}\Delta_{n-k}(f^{(k)})$.

$\mathcal{P}_1$ est vraie d'après 4.c; si $\mathcal{P}_k$ est vraie, on considère une f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et un $n > k+2$. Alors on peut appliquer $\mathcal{P}_k$ au couple f, n; donc $\Delta_n(f) \leq \frac{(2M_0)^k}{n(n-1)..(n-k+1)}\Delta_{n-k}(f^{(k)})$. Comme $n - k \geq 3$ et $f^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$, on applique $\mathcal{P}_1$ à ce couple, ce qui donne $\Delta_{n-k}(f^{(k)}) \leq \frac{2M_0}{(n-k)}\Delta_{n-k+1}(f^{(k+1)})$. D'où l'inégalité espérée et $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Noter que l'on doit prendre $n > k + 1$ et non $n > k$.

Soit $F \in C$; la suite $n \mapsto \Delta_n(F)$ est positive décroissante, donc a une limite ℓ. D'après Stone-Weierstrass, il existe une suite (Q_p) de polynomes telle que $\|F - Q_p\| \underset{p\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons $N(0) = \deg Q_0$ et $N(p) = sup(\deg Q_p, N(p-1) + 1)$ pour tout $p > 0$; alors $Q_p \in \mathbf{E}_{N(p)}$ donc $0 \leq \Delta_{N(p)}(F) \leq \|F - Q_p\|$; ainsi la sous-suite $\Delta_{N(p)}(F)$ tend vers 0; donc $\ell = 0$.

Revenons à f de classe $\mathcal{C}^k$ et prenons $F = f^{(k)} \in C$. Alors $\Delta_n(f^{(k)}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Donc avec 4.c, $\Delta_n(f) = o(1/n^k)$

II.1.a Les formes linéaires $\ell_1 : P \mapsto P(1)$ et $\ell_{-1} : P \mapsto P(-1)$ sont indépendantes; donc $E_n^0 = \{P \in E_n \ / \ \ell_1(P) = \ell_{-1}(P) = 0\}$ est de dimension : $\dim E_n - \mathrm{rg}(\ell_1, \ell_{-1}) = (n + 1) - 2$.
D'où $\boxed{\dim E_n^0 = n - 1}$

Les polynomes e_k, $k = 2..n$ sont de degrés échelonnés, donc forment une famille libre de $n - 1$ éléments de E_n^0; donc c'en est une base.

1.b Il est clair que $\Phi_n(e_k) + k(k-1)e_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_{k-1})$, donc M_n est triang.sup.

Donc les vp de M_n sont les nombres $-k(k-1)$, $k = 2..n$; ainsi M_n admet $n - 1$ vp distinctes, donc est diagonalisable. D'où l'existence d'une base $(Q_2, \ldots, Q_n)$ de E_n^0 formée de VP de Φ_n. Donc $(1 - X^2)Q_k'' = -k(k-1)Q_k$, et en comparant les termes de plus haut degré des 2 membres, $\deg Q_k = k$.

1.c PQ est divisible par $(1 - x^2)^2$, donc $\frac{PQ}{1 - X^2}$ est un polynome, donc continu sur I. D'où l'existence de $J(P, Q)$.

Et comme $\frac{P^2}{1 - X^2}$ est continue positive sur I, si $J(P, P) = 0$, alors $P(x) = 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Donc $P = 0$ (polynome ayant une infinité de racines).

1.d Intégration par parties : $\int_{-1}^{1} Q_k'Q_j' = \big[Q_k(x)Q_j'(x)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_kQ_j'' = -\big(Q_k|(1 - X^2)Q_j''\big) = k(k-1)\big(Q_k|Q_j\big)$.
Idem en échangeant j et k; donc $(k - j)(k + j - 1)\big(Q_k|Q_j\big) = 0$. On en déduit que Q_k et Q_j sont orthogonaux si $k \neq j$. Donc $(Q_k)_{k=2..n}$ est une base orthogonale.

II.2.a Si $P \in E_{n-3}$, alors $P_1 = (1 - X^2)P$ appartient à $E_{n-1} = \text{Vect}(Q_2, \dots, Q_{n-1} \subset Q_n^\perp$. Donc $(Q_n|P_1) = 0$, c.a.d $\int_{-1}^{1} PQ_n = 0$

2.b Dans le cas i), le polynome $R_1 Q_n$ garde un signe constant, est continu, donc $\int_{-1}^{1} R_1 Q_n \neq 0$; d'après 2.a, on a donc $p = \deg R_1 > n-3$. Mais $p \leq \deg Q_n - 2 = n-2$ puisque les racines -1 et 1 de Q_n ne sont pas racines de R_1. Dans ce cas, on a donc $p = n-2$.

Dans le cas ii), même raisonnement avec $R_1 = 1$; donc $0 = \deg R_1 > n-3$ ce qui est absurde.

Les cas i) et ii) recouvrant toutes les situations, on a $p = n-2$, donc Q_n a n racines distinctes dans I (en rajoutant -1 et 1) et elles sont simples puisque $\deg Q_n = n$.

II.3.a u_n est linéaire (évident), injective car si $P \in \text{Ker}\, u_n$, ce polynome de degré $\leq n$ a $n+1$ racines, donc est nul. Et avec le théorème du rang, $\text{rg}\, u_n = \dim E_n = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, donc u_n surjective.

Par définition, $I_n(f)$ est l'antécédent de $(f(y_0), \dots, f(y_n))$ par u_n; d'où son existence et unicité. Et il est clair que $I_n(f) - P \in E_n$ et vérifie $u_n[I_n(f) - P] = (\dots, (f-P)(y_k), \dots)$

3.b La fraction rationnelle $\dfrac{I_n(f)}{Q_{n+1}}$ a pour poles $y_0, \dots, y_n$ et sa décomposition en éléments simples est $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{x - y_k}$ avec $a_k = \dfrac{f(y_k)}{Q_n'(y_k)}$ (formule classique). D'où CQFD.

3.c D'abord $|f(x) - I_n(f)(x)| \leq |f(x)| + \sum\limits_{k=0}^{n} |f(y_k)L_k(x)| \leq \|f\| \left(1 + \sum\limits_{k=0}^{n} |L_k(x)|\right)$.

Puis on remplace f par $f - P$ dans cette inégalité; le premier membre ne change pas puisque $I_n(f-P) = I_n(f) - P$, d'où CQFD.

II.4.a Linéarité de v_n évidente.Si $v_n(P) = 0$, alors les y_k sont racines doubles de P, donc P admet $2n+2 > \deg P$ racines, donc $P = 0$. D'où $\text{Ker}\, v_n = \{0\}$ et le théo. du rang donne la surjectivité. Comme en 3.a, $H_n(f)$ est l'antécédent de $(\dots, f(y_k), \dots, f'(y_k), \dots)$ par v_n. Enfin pour tout $P \in E_{2n+1}$, $H_n(P) = P$, en particulier $H_n(1) = 1$.

4.b Taylor-Young donne $Q_{n+1}(y_k + t) = tQ'_{n+1}(y_k) + \dfrac{t^2}{2} Q''_{n+1}(y_k) + o(t^2)$, donc $L_k(y_k + t) = 1 + t\dfrac{Q''_{n+1}(y_k)}{2Q'_{n+1}(y_k)} + o(t)$.

Or pour $k = 1..n-1$, $Q''_{n+1}(y_k) = \mu_{n+1} Q_{n+1}(y_k)/(1 - y_k^2) = 0$, donc $\boxed{L'_k(y_k) = 0,\ k = 1..n-1}$

Maintenant $k = 0$ ou $k = n$, donc $y_k^2 = 1$. Alors, quand $t \to 0$, $1 - (y_k + t)^2 = y_k^2 - (y_k + t)^2 \sim -2y_k t$ et $Q_{n+1}(y_k + t) \sim tQ'_{n+1}(y_k)$; donc $\mu_{n+1} Q'_{n+1}(y_k)t \sim \mu_{n+1} Q_{n+1}(y_k + t) \sim -2y_k Q''_{n+1}(y_k)t$. D'où $\mu_{n+1} Q'_{n+1}(y_k) = -2y_k Q''_{n+1}(y_k)$ ce qui donne $\boxed{L'_k(y_k) = -y_k \dfrac{\mu_{n+1}}{4} = y_k \dfrac{n(n+1)}{4} \text{ pour } k = 0 \text{ ou } k = n}$. Ou encore $L'_n(1) = -L'0(-1) = \dfrac{n(n+1)}{4}$

4.c On prend $f = 1$. Ce qui donne $H_n(1) = 1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(1 - 2(x - y_k)L'_k(y_k)\big) L_k(x)^2$ ou encore

$1 = \sum\limits_{k=0}^{n} L_k(x)^2 + \dfrac{n(n+1)}{4}\big[(1+x)L_0(x)^2 + (1-x)L_n(x)^2\big]$. Comme la quantité entre crochets est positive (pour $x \in I$), on a bien $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k(x)^2 \leq 1$.

On applique l'inégalité de Schwartz aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et $(|L_0(x)|, \dots, |L_n(x)|)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ usuel : $\sum\limits_{k=0}^{n} |L_k(x)| \leq \sqrt{(n+1) \sum L_k(x)^2} \leq \sqrt{n+1}$.

II.5 II.3.c et II.4.c donnent $|f(x) - I_n(f)(x)| \leq (1 + \sqrt{n+1})\, \|f - P\|$ pour $x \in I$ et tout $P \in E_n$. Donc $\|f - I_n(f)\| \leq (1 + \sqrt{n+1} \|f - P\|$, qui est valable pour tout P de E_n, donc en particulier pour celui qui minimise $\|f - P\|$. D'où $\|f - I_n(f)\| \leq (1 + \sqrt{n+1} \Delta_n f$.

Ensuite on vérifie facilement que $1 + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n}$ pour $n \geq 3$.

Enfin, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\Delta_n(f) = o(\dfrac{1}{n})$, donc $\|f - I_n(f)\| = o(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, c.a.d $I_n(f) \xrightarrow{u} f$ sur I.