Corrigé ENS BCPST Session 2007

Première partie : Préliminaires

1. P est un équilible non dégénéré, $P' = P$, d'où $\forall i, P_i = \frac{1}{V} P_i V_i(P)$ et $P_i \neq 0$, d'où :

$$\forall i, V_i(P) = V$$

2. D'après la question précédente, P et Q étant des équilibres non dégénérés, $AP = V(P)\mathbf{1}$ et $AQ = V(Q)\mathbf{1}$

${}^tQAP = {}^tQ(AP) = V(P){}^tQ\mathbf{1} = V(P)$ car ${}^tQ\mathbf{1} = \sum_{k=1}^{k=m} Q_k = 1$ (Q est une distribution)

${}^tQAP = {}^t({}^tAQ)P = {}^t(AQ)P$ (car A est symétrique)

${}^tQAP = V(Q){}^t\mathbf{1}P = V(Q)$

Conclusion :

$$V(P) = V(Q)$$

Deuxième partie : Unicité de l'équilibre

1. P et Q sont deux équilibres non dégénérés

a) $AP = V(P)\mathbf{1}$ et $AQ = V(Q)\mathbf{1}$ d'où $A(P-Q) = 0$ et $P - Q \in Ker(A)$

b) Supposons que $H \cap Ker(A) = \{0\}$.Soit Q un équilibre non dégénéré alors ${}^t\mathbf{1}P = {}^t\mathbf{1}Q = 1$, d'où ${}^t\mathbf{1}(P-Q) = 0$, d'où $P - Q \in H$

$P - Q \in H \cap Ker(A)$, d'où $P - Q = 0$, c'est-à-dire $Q = P$.

$$P \text{ est l'unique équilibre non dégénéré}$$

2. Soit v un vecteur non nul de $H \cap Ker(A)$

a) c est bien défini car c'est le plus petit élément d'un ensemble fini et non vide (car v est non nul) et $c > 0$ car P est non dégénéré d'où $\forall i, P_i > 0$

Notons Q_i les coordonnées de $Q^{(\epsilon)} = P + \epsilon v$

Si $v_i = 0$, $Q_i = P_i \in]0, 1[$

Si $v_i \neq 0$, $|\epsilon| < \frac{P_i}{|v_i|}$, d'où $Q_i > P_i - P_i \frac{|v_i|}{|v_i|} = 0$

D'autre part ${}^t\mathbf{1}Q^{(\epsilon)} = {}^t\mathbf{1}P + \epsilon {}^t\mathbf{1}v = 1 + 0 = 1$

$\sum_{i=1}^{i=m} Q_i = 1$ et $\forall i, Q_i > 0$. D'où :

$$\forall i,\ Q_i \in]0, 1[$$

b) Supposons $H \cap Ker(A) \neq \{0\}$,donc il existe v non nul de $H \cap Ker(A)$ d'où $Q^{(\epsilon)}$ défini ci-dessus est une distribution non dégénérée

$AQ^{(\epsilon)} = AP + \epsilon Av = AP = V_e\mathbf{1}$.

$V(Q^{(\epsilon)}) = {}^tQ^{(\epsilon)}AQ^{(\epsilon)} = V_e {}^tQ^{(\epsilon)}\mathbf{1} = V_e$, $\frac{1}{V_e} Q_i(AQ)_i = Q_i$, d'où $Q^{(\epsilon)}$ est un équilibre non dégénéré.

Or en choisissant ϵ non nul, et comme il existe i tel, que v_i est non nul, alors $Q^{(\epsilon)} \neq P$ et on a montré l'existence de deux équilibres non dégénérés.

On a montré alors la contraposée de l'autre implication.

En conclusion, avec **1**. et **2**., on a montré l'équivalence :

$$P \text{ est le seul équilibre non dégénéré } \Leftrightarrow H \cap Ker(A) = \{0\}$$

3. a) $H \cap Ker(A) = Vect((-2,1,1))$

b) On veut déterminer $P = (x, y, z)$, une distribution non dégénérée telle que $AP = \alpha \mathbf{1}$.

${}^t\mathbf{1}AP{=}\alpha{}^t\mathbf{1}\mathbf{1} = 3\alpha = (1\,1\,1)\begin{pmatrix} 2x+y+3z \\ x+2y \\ 3x+6z \end{pmatrix} = 6x+3y+9z$, d'où $\alpha = 2x+y+3z$

$AP = \alpha \mathbf{1} \Leftrightarrow x - y + 3z = 0$

On choisit par exemple $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right)$ et $Q = \left(\frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$ et $V_e = \frac{3}{2}$.

Troisième partie: Un principe fondamental de la sélection naturelle

1. $V(P') = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} p'_i p'_j = \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j} a_{i,j} p_i \left(\sum\limits_k a_{ik} p_k\right) p_j V_j = \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k V_j$

$$V(P') = \frac{1}{V^2} \sum_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k V_j$$

2. a) a et b étant positifs, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

b) En intervertissant j et k, $V(P') = \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k V_j = \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k V_k = \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k \frac{V_j + V_k}{2} \geqslant \frac{1}{V^2} \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k \sqrt{V_j V_k}$

d'après le a) car tous les termes sont positifs.

$$V' \geqslant \frac{1}{V^2} \sum_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k \sqrt{V_j V_k}$$

3. D'après l'inégalité de convexité, P étant une distribution et en prenant $\gamma = 2$,

$\left(\sum\limits_{i=1}^m p_i \left(\sum\limits_{j=1}^m a_{ij} p_j \sqrt{V_j}\right)\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^m p_i \left(\sum\limits_{j=1}^m a_{ij} p_j \sqrt{V_j}\right)^2 = \sum\limits_{i,j,k} a_{i,j} a_{ik} p_i p_j p_k \sqrt{V_j V_k}$,

on a donc bien l'iégalité demandée :

$$V' \geqslant \frac{1}{V^2} \left(\sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} p_j \sqrt{V_j}\right)\right)^2$$

4. a) $\sum\limits_{i=1}^m p_i \left(\sum\limits_{j=1}^m a_{ij} p_j \sqrt{V_j}\right) = \sum\limits_{j=1}^m p_j \sqrt{V_j} \left(\sum\limits_{i=1}^m a_{ij} p_i\right) = \sum\limits_{j=1}^m p_j \sqrt{V_j} \left(\sum\limits_{i=1}^m a_{ji} p_i\right)$ car A est symétrique

$\sum\limits_{i=1}^m p_i \left(\sum\limits_{j=1}^m a_{ij} p_j \sqrt{V_j}\right) = \sum\limits_{j=1}^m p_j (V_j)^{\frac{3}{2}}$.D'où:

$$V' \geqslant \frac{1}{V^2} \left(\sum_{j=1}^m p_j (V_j)^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

b) Par l'inégalité de convexité, $\sum\limits_{j=1}^m p_j (V_j)^{\frac{3}{2}} \geqslant \left(\sum\limits_{j=1}^m p_j V_j\right)^{\frac{3}{2}}$

$V' \geqslant \frac{1}{V^2} \left(\sum\limits_{j=1}^m p_j V_j\right)^3 = \frac{V^3}{V^2} = V$. Conclusion : $V' \geqslant V$, c'est-à-dire :

la viabilité globale est une fonction croissante du temps

Quatrième partie : Stabilité des équilibres non dégénérés

P est un équilibre non dégénéré

1. a) **Résultat hors programme des BCPST**
A étant symétrique réelle, A est diagonalisable dans une base orthonormée, il existe D diagonale et R orthogonale telles que ${}^tRR = I$ et $A = RD{}^tR$. La diagonale de D est formée des valeurs propres de A.

b) $V(P) = {}^tPAP = {}^t({}^tRP)D({}^tRP) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i^2$ avec ${}^tRP = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$ et $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_m)$

$V(P) > 0$ et il existe λ_i strictement positif, d'où:

$$\alpha \geqslant 1$$

2. a) $S = P + X$ distribution allélique ssi $S \geqslant 0$ et ${}^t\mathbf{1}S = \mathbf{1} = {}^t\mathbf{1}P + {}^t\mathbf{1}X$ ssi $S \geqslant 0$ et ${}^t\mathbf{1}X$ =0

Comme $P > 0$, on peut trouver $\theta > 0$ tel que si $\| X \| < \theta$, alors $P + X \geqslant 0$.
On choisira alors $\epsilon \leqslant \theta$, pour avoir des distributions.
(1) :$\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^m$, si $\| X \| < \epsilon$ et ${}^t\mathbf{1}X = 0$, alors ${}^tXAX \leqslant 0$
$S = P + X$, une distribution , ${}^tSAS = {}^tXAX + 2{}^tXAP + {}^tPAP = {}^tXAX + {}^tPAP$ car ${}^tXAP = V_e{}^tX\mathbf{1} = 0$
d'où ${}^tXAX \leqslant 0 \Leftrightarrow {}^tSAS \leqslant {}^tPAP$
d'où :

$$(1) \Leftrightarrow V(P) \text{ est un maximum local de viabilité}$$

b) (2) : $\forall X \in \mathbb{R}^m$, ${}^t1X = 0$, alors ${}^tXAX \leqslant 0$
Bien évidemment, on a (2)$\Longrightarrow$(1)
Réciproquement, on suppose que (1) est vrai, prenons un X quelconque tel que ${}^t\mathbf{1}X = 0$
Si $X = 0$, (2) est vrai
Sinon, posons $Y = \frac{\epsilon}{2\|X\|}X$, alors ${}^t\mathbf{1}Y = 0$ et $\| Y \| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$,d'où ${}^tYAY \leqslant 0$
${}^tXAX = \left(\frac{2\|X\|}{\epsilon}\right)^2 {}^tYAY \leqslant 0$ et (2) est vrai

On a donc montré que (1)$\Longleftrightarrow$(2)

c) En reprenant les calculs du a), on a l'implication : (2)$\Longrightarrow$pour toute distibution $S = P + X$, ${}^tSAS \leqslant tPAP$
Donc $V(P)$ est un maximum local $\Longrightarrow$(1) $\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$ $V(P)$ est un maximum global
Donc l'équivalence (5) est montrée, sachant qu'une implication est triviale

Posons $Q = {}^tRP$
Pour X quelconque , posons $Y = {}^tRX$ (Réciproquement, pour Y quelconque, on pose $X = ({}^tR)^{-1}Y = RY$)
${}^tQDY = {}^tPRD{}^tRX = {}^tPAX = {}^t(AP)X = V_e{}^t\mathbf{1}X$ et ${}^tXAX = {}^tY{}^tRARY = {}^tYDY$
${}^tQDY = 0 \Longleftrightarrow {}^t\mathbf{1}X = 0$ et ${}^tXAX \leqslant 0 \Longleftrightarrow {}^tYDY \leqslant 0$

$$V_e \text{ est un maximum global ssi } \forall Y, \text{si } {}^tQDY = 0, \text{alors } {}^tYDY \leqslant 0$$

3. Supposons $\alpha \geqslant 2$, il existe au moins deux vecteurs Y_1 et Y_2 de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ associés à des valeurs propres λ_1 et λ_2 strictement positives (éventuellement égales).
$\dim Ker({}^tQD) \geqslant m-1$ car ${}^tQD \in M_{1,m}$ et $\dim vect(Y_1, Y_2) = 2$,
donc l'intersection de ces deux sous-espaces n'est pas réduite au vecteur nul.
Soit $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 \neq 0$ et appartenant à $Ker({}^tQD) \cap vect(Y_1, Y_2)$
D'après le **2**., comme V_e est un maximum de viabilité, ${}^tYDY \leqslant 0$.
D'autre part, ${}^tYDY = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 > 0$ (car a_1 ou a_2 non nul)
Il y a donc une contradiction et donc $\alpha = 1$
On a montré que : si V_e est un maximum de viabilité alors $\alpha = 1$

$$\text{si } V_e \text{ est un maximum de viabilité alors } \alpha = 1$$

4. Réciproquement, on suppose que $\alpha = 1$, donc $\forall k \geqslant 2, \lambda_k \leqslant 0$
On reprend les notations du **2**.c) $Q = {}^tRP$
${}^tQDQ = {}^tPAP = V_e > 0$, d'où $\lambda_1 Q_1^2 > \sum\limits_{k=2}^{m} (-\lambda_k) Q_k^2 = \sum\limits_{k=2}^{m} |\lambda_k| Q_k^2$

$$\lambda_1 Q_1^2 > \sum_{k=2}^{m} |\lambda_k| Q_k^2$$

b) Soit Y tel que ${}^tQDY = 0$
${}^tQDY = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k Q_k Y_k = 0$. Donc $(\lambda_1 Q_1 Y1)^2 = \left(\sum\limits_{k=2}^{m} \lambda_k Q_k Y_k\right)^2$.
Or $\left(\sum a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)$ (inégalité pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{m-1}$).
L'inégalité de Cauchy-Schwarz est hors programme des BCPST
En posant $a_k = \sqrt{|\lambda_k|}\, Q_k$ et $b_k = \sqrt{|\lambda_k|}\, Y_k$, on obtient :

$$(\lambda_1 Q_1 Y_1)^2 \leqslant \left(\sum_{k=2}^{m} |\lambda_k| Q_k^2\right)\left(\sum_{k=2}^{m} |\lambda_k| Y_k^2\right)$$

c) $\lambda_1 Q_1^2 > \sum\limits_{k=2}^{m} |\lambda_k| Q_k^2$ donc $\lambda_1 Q_1^2 > 0$. $\quad \lambda_1^2 Q_1^2 Y_1^2 \leqslant \left(\lambda_1 Q_1^2\right)\left(\sum\limits_{k=2}^{m} |\lambda_k| Y_k^2\right)$,
d'où $\lambda_1 Y_1^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=2}^{m} |\lambda_k| Y_k^2\right)$ (on a simplifié par $\lambda_1 Q_1^2 > 0$)
d'où ${}^tYDY \leqslant 0$
D'après le 2.c) on en déduit que V_e est un maximum de viabilité.

Conclusion on a montré (6)

$$V_e \text{ est un maximum de viabilité ssi } \alpha = 1$$

5. a) $A = J - sI$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1
$Sp^*(J) = (0, 0, .., 0, m)$, la multiplicité de 0 est $m-1$, celle de m et 1 (on appelle multiplicité d'une valeur propre la dimension du sous espace propre associé)
J est semblable à $diag(0, .., 0, m)$ d'où A est semblable à $diag(-s, .., -s, m-s)$
D'où $Sp^*(A) = (-s, .., -s, m-s)$ .La valeur propre $-s$ est de multiplicité $m-1$, $m-s$ de multiplicité 1.

b) 0 n'est pas valeur propre de A (car $s \in]0, 1[$) donc A est inversible et $ker(A) = \{0\}$.
D'après la deuxième partie, il existe au plus un équilibre non dégénéré.

c) $m - s > 0$, on a donc $\alpha = 1$, donc d'après la quatrième partie, V_e est un maximum global de viabilité s'il existe un équilibre non dégénéré.

Prenons $P=\frac{1}{m}\mathbf{1}$, P est une distribution non dégénérée.
$AP=\frac{1}{m}(m-s)\mathbf{1}$, d'où $V(P)=\frac{m-s}{m}$ et on a bien $P'=P$. Donc $V_e=V(P)$ est un maximum global de viabilité.

Cinquième partie : Extinction d'allèles

A. Un théorème de Cauchy

1. Si on note $(e_1,..,e_m)$ la base canonique et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit i le numéro de la ligne et de la colonne supprimée , si on permute les vecteurs e_i et e_m, dans cette nouvelle base , l'endomorphisme f a pour matrice $A'=\begin{pmatrix} B & X \\ {}^tX & a \end{pmatrix}$

B étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, il existe R orthogonale et D diagonale telles $B=RD^tR$.**A nouveau, on a besoin du résulatt hors programme des BCPST**

Soit $Q=\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1}={}^tQ=\begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $Q^{-1}A'Q=\begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & X \\ {}^tX & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tRBR & {}^tRX \\ {}^tXR & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & z \\ {}^tz & a \end{pmatrix}$

Donc A' et donc A est semblable à $\begin{pmatrix} D & z \\ {}^tz & a \end{pmatrix}$.

$$\text{il existe } V \text{ inversible telle que } V^{-1}AV=\begin{pmatrix} D & z \\ {}^tz & a \end{pmatrix}$$

2. Notons X_i les coordonnées de X

$$V^{-1}(A-\lambda I_m)VX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D-\lambda I_{m-1} & z \\ {}^tz & a-\lambda \end{pmatrix}X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i\leqslant m-1,\ (\mu_i-\lambda)\,X_i+z_iX_m=0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m-1} z_jX_j+(a-\lambda)X_m=0 \text{ (dernière ligne)} \end{cases}$$

3. $\lambda\in\mathcal{M}$

a) $\lambda=\mu_1=..=\mu_k$ et $\lambda\in\mathcal{M}$ donc il existe i_o de $\{1,..,k\}$ tel que $z_{i_0}\neq 0$

$$V^{-1}(A-\lambda I_m)VX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i\in\{1,..,k\},\ z_i\ X_m=0 \\ \forall i\in\{k+1,..,m-1\},\ (\mu_i-\lambda)\,X_i+z_iX_m=0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m-1} z_jX_j+(a-\lambda)X_m=0 \end{cases},\quad z_{i_0}\ X_m=0\Rightarrow$$
$X_m=0$

$$V^{-1}(A-\lambda I_m)VX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_m=0 \\ \forall i\in\{k+1,..,m-1\},\ X_i=0 \\ \sum\limits_{j=1}^{k} z_jX_j=0 \end{cases}$$

D'où $Ker(V^{-1}(A-\lambda I_m)V)=Ker(g)$ où g est l'application linéaire de E_k dans $\mathbb{R}$, telle que $g(X_1,..,X_k,0,..,0)=\sum\limits_{j=1}^{k} z_jX_j$.

g n'est pas l'application nulle car en prenant tous les $X_i=0$ sauf $X_{i_0}=1$, on trouve une image égale à $z_{i_0}\neq 0$.

Par le théorème du rang, $\dim Ker(g)=\dim E_k-rg(g)=k-1$

$d_A(\lambda)=\dim Ker(V^{-1}(A-\lambda I_m)V),\ \ d_B(\lambda)=k$

d'où:

$$d_A(\lambda) = d_B(\lambda) - 1$$

4. $\lambda \notin \mathcal{M}$ donc $\forall i \in \mathcal{J},\ \lambda - \mu_i \neq 0$, $\forall i \notin \mathcal{J},\ z_i = 0$

$$V^{-1}(A - \lambda I_m)VX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \mathcal{J},\ X_i = \frac{z_i}{(\lambda-\mu_i)} X_m \\ \forall\ i \notin \mathcal{J},\ (\mu_i - \lambda)\, X_i = 0 \\ \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} z_j \frac{z_j}{(\lambda-\mu_j)} X_m + (a-\lambda) X_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \mathcal{J},\ X_i = \frac{z_i}{(\lambda-\mu_i)} X_m \\ \forall\ i \notin \mathcal{J},\ (\mu_i - \lambda)\, X_i = 0 \\ f(\lambda) X_m = 0 \end{cases}$$

Notons $(e_1, .., e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$

si $\lambda \notin \Omega,\ V^{-1}(A - \lambda I_m)VX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \mathcal{J},\ X_i = 0 \\ \forall\ i \notin \mathcal{J},\ (\mu_i - \lambda)\, X_i = 0 \\ X_m = 0 \end{cases}$

$(V^{-1}(A - \lambda I_m)V) = Vect(e_i \text{ avec } i \notin \mathcal{J} \text{ et } \lambda = \mu_i\})$ donc $d_A(\lambda) = d_B(\lambda)$

(Par convention, on pose $vect(\varnothing) = \{0\}$)

si $\lambda \in \Omega$, $V^{-1}(A - \lambda I_m)VX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \mathcal{J},\ X_i = \frac{z_i}{(\lambda-\mu_i)} X_m \\ \forall\ i \notin \mathcal{J},\ (\mu_i - \lambda)\, X_i = 0 \\ X_m \quad \text{quelconque} \end{cases}$

$Ker(V^{-1}(A - \lambda I_m)V) = vect\,(e_i \text{ avec } i \notin \mathcal{J} \text{ et } \lambda = \mu_i) \oplus vect(e)$

où $e = (X_1, .., X_m)$ avec $X_m = 1$, $\forall i \in \mathcal{J},\ X_i = \frac{z_i}{(\lambda-\mu_i)} X_m$ et sinon $X_i = 0$

donc $d_A(\lambda) = d_B(\lambda) + 1$

$$\forall \lambda \notin \mathcal{M}, \quad \begin{cases} \lambda \in \Omega \Rightarrow d_A(\lambda) = d_B(\lambda) + 1 \\ \lambda \notin \Omega \Rightarrow d_A(\lambda) = d_B(\lambda) \end{cases}$$

5. a) $\mathcal{D}f = \mathbb{R} \backslash \mathcal{M}$. En effet, pour tout j de $\mathcal{J}$, il existe $i \in \mathcal{I}$, tel que $z_i \neq 0$ et $\mu_j = \mu_i$

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = -1 - \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} \frac{z_j^2}{(x-\mu_j)^2} < 0$. Donc f est strictement décroissante sur les intervalles sur lesquels elle est définie.

L'intersection de $]a, b[$ et de $\mathcal{D}_f$ est la réunion de $k+1$ intervalles sur lesquels f est strictement décroissante, f s'annule au plus une fois sur chacun des intervalles.

Donc f s'annule au plus $k+1$ fois sur $]a, b[$.

c) $K_1 =]a, b[\cap \mathcal{M}$, $\quad K_2 =]a, b[\cap \{\lambda, \lambda \in \Omega, \lambda \notin \mathcal{M}\}$, $\quad K_3 =]a, b[\cap \{\lambda, \lambda \notin \Omega, \lambda \notin \mathcal{M}\}$

$D_A(]a, b[) = \sum\limits_{\lambda \in K_1} d_A(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_A(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in K_1} (d_B(\lambda) - 1) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_B(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} (d_B(\lambda) + 1)$

$\sum\limits_{\lambda \in K_1} (d_B(\lambda) - 1) = \sum\limits_{\lambda \in K_1} d_B(\lambda) - k, \quad \sum\limits_{\lambda \in K_2} (d_B(\lambda) + 1) \leqslant \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_B(\lambda) + k + 1$

D'où $D_A(]a, b[) \leqslant \sum\limits_{\lambda \in K_1} d_B(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_B(\lambda) + \sum\limits_{\lambda \in K_2} d_B(\lambda) - k + k + 1 = D_B(]a, b[) + 1$

$$D_A(]a, b[) \leqslant D_B(]a, b[) + 1$$

B. Nombre d'allèles survivants

6. D'aprés le théorème de Cauchy en prenant $]a, b[= \mathbb{R}_+^*$, par récurrence immédiate,
si B est une sous-matrice pricipale d'ordre $m - q$,

$$D_B(\mathbb{R}_+^*) \geqslant D_A(\mathbb{R}_+^*) - q$$

7. On suppose que A possède exactement r valeurs propres strictement positives , c'est-à-dire $D_A(\mathbb{R}_+^*) = r$

Soit P un équilibre réalisant un maximum local de viabilité. Soit q le nombres d'allèles en proportions nulles.

On ôte à A les q lignes et q colonnes correspondant aux allèles en portions nulles. On obtient alors une sous-matrice Bde A et une distribution Q non dégénérée(obtenue à partir de P en supprimant les 0).

${}^tQBQ = {}^tPAP = V(P) = V(Q)$ et $Q' = Q$

Q est donc un équilibre **non dégénéré** réalisant un maximum local. Donc d'aprés la quatrième partie, $D_B(\mathbb{R}_+^*) = 1$.

D'apés le **6.**, $D_A(\mathbb{R}_+^*) \leqslant q + 1$ d'où $q \geqslant r - 1$

Au moins $r - 1$ allèles sont en proportions nulles

Corrigé de Martine Ginestet UPA
Remarques éventuelles à envoyer à : martine-ginestet@orange.fr