

PARTIE I

1. Si $|k| < 1$, la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\chi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}$ existe pour tout φ de $\mathbb{R}$.

Si $|k| = 1$, alors $\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{|\cos u|}$ est continue et positive sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Notons $h = \pi/2 - u$, pour u dans $[0, \pi/2[$. $|\cos u| = \cos u = \sin h \underset{0}{\sim} h$ donc $\frac{1}{|\cos u|} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\pi/2 - u}$. La divergence de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\pi/2 - u} \text{ entraîne celle de } \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u}.$$

On procède de même pour montrer la divergence de $\int_{-\pi/2}^0 \frac{du}{\cos u}$.

Il en résulte que $\chi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{du}{|\cos u|}$ existe si et seulement si $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$D_\chi = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } |k| < 1 \\]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \text{si } |k| = 1 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de χ est symétrique par rapport à 0 et en faisant le changement de variable $v = -u$, on a, pour tout φ de D_χ :

$$\chi(-\varphi) = \int_0^{-\varphi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \int_0^\varphi \frac{-dv}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 v}} = -\chi(\varphi) \quad \text{donc } \boxed{\chi \text{ est impaire.}}$$

La fonction $\varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$ est continue sur D_χ , donc χ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_χ , et pour tout φ de D_χ ,

$$\chi'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} > 0, \text{ donc } \boxed{\chi \text{ est strictement croissante sur } D_\chi}.$$

$$\text{Par la relation de Chasles, } \chi(\varphi + \pi) = \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} + \int_\varphi^{\varphi+\pi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \chi(\varphi) + \int_\varphi^{\varphi+\pi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}.$$

$$\text{Comme la fonction } u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} \text{ est } \pi\text{-périodique, } \chi(\varphi + \pi) = \chi(\varphi) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}$$

$$\text{et comme elle est paire, } \chi(\varphi + \pi) = \chi(\varphi) + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \chi(\varphi) + 2\chi(\pi/2)$$

$$\boxed{\chi(\varphi + \pi) = \chi(\varphi) + 2C.}$$

2. Soit $n \geq 1$. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} L_n &= \int_0^{\pi/2} (\sin v)^{2n} dv = \left[(-\cos v)(\sin v)^{2n-1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos v)(2n-1)(\sin v)^{2n-2} \cos v dv \\ &= (2n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin v)^{2n-2} (1 - (\sin v)^2) dv = (2n-1) (L_{n-1} - L_n) \end{aligned}$$

d'où : $2n L_n = (2n-1) L_{n-1}$. Comme $L_0 = \pi/2$, on en déduit, par récurrence, que

$$\boxed{L_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant le développement en série entière de $t \mapsto (1+t)^\gamma$ de rayon de convergence 1 pour $\gamma = -1/2$ et $t = -k^2 \sin^2 u$, on obtient, pour tout $(k, u) \in]-1, 1[\times [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-k^2 \sin^2 u)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} u \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} k^{2n} \sin^{2n} u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} L_n k^{2n} \sin^{2n} u \end{aligned}$$

En scindant en somme partielle de rang N et reste, cela donne : $\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N L_n k^{2n} \sin^{2n} u + \rho_N(u)$

$$\text{où } |\rho_N(u)| = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n} \sin^{2n} u \right| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n}.$$

La majoration précédente est licite car $\frac{2}{\pi} \sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n}$ est le reste d'ordre N d'une série convergente, de somme

$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ si on indexe à partir de 0 (calcul précédent pour $u = \pi/2$).

Grâce à la linéarité de l'intégrale, on en déduit : $\forall k \in]-1, 1[$,

$$C = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N L_n k^{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{2n} du + \int_0^{\pi/2} \rho_N(u) du = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N L_n^2 k^{2n} + R_N$$

$$\text{où } |R_N| = \left| \int_0^{\pi/2} \rho_N(u) du \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\rho_N(u)| du \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ (reste d'une série convergente).}$$

A fortiori, $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. Le passage à la limite dans l'égalité $C = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N L_n^2 k^{2n} + R_N$ montre que C est développable en série entière de la variable k .

Comme $\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n}$, le rayon de convergence de la série entière est 1, par la règle de d'Alembert.

$$\boxed{\forall k \in]-1, 1[, \quad C = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^2 k^{2n}.$$

3. On a vu au 1. que la fonction χ est strictement croissante sur son domaine de définition. A fortiori,

$$\boxed{\chi \text{ est injective sur son domaine de définition.}}$$

Si $|k| < 1$, alors pour tout φ de $\mathbb{R}$, $\chi(\varphi + \pi) = \chi(\varphi) + 2C$ avec $C > 0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive sur un segment. Par récurrence on obtient : pour tout n de $\mathbb{N}$, $\chi(\varphi + n\pi) = \chi(\varphi) + 2nC$ et en particulier $\chi(n\pi) = \chi(0) + 2nC = 2nC \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

La fonction χ est donc non bornée, et comme elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \chi(\varphi) = +\infty$.

Par parité, $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \chi(\varphi) = -\infty$.

χ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\chi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc χ est dans ce cas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Si $|k| = 1$, alors $\chi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{du}{\cos u}$ est l'intégrale d'une fonction positive telle que $\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u}$ soit divergente,

donc $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \int_0^\varphi \frac{du}{\cos u} = +\infty$. Par parité, $\lim_{\varphi \rightarrow -\pi/2} \chi(\varphi) = -\infty$.

χ est continue, strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $\chi(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$, donc χ est dans ce cas une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction réciproque } \phi \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ impaire et strictement croissante.}}$$

Pour k de valeur absolue strictement inférieure à 1, soit $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi = \phi(x)$. On a donc $x = \chi(\varphi)$.

L'égalité $\chi(\varphi + \pi) = \chi(\varphi) + 2C$ équivaut à : $\varphi + \pi = \phi(\chi(\varphi) + 2C)$ soit encore à $\phi(x) + \pi = \phi(x + 2C)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x + 2C) = \phi(x) + \pi.}$$

4. Par composition, les trois fonctions α_k , β_k et γ_k sont définies sur $\mathbb{R}$, α_k est impaire, β_k et γ_k sont paires.

On a vu de plus que la fonction χ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et pour tout φ de D_χ , $\chi'(\varphi) \neq 0$.

Donc la fonction réciproque ϕ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $\phi'(x) = \frac{1}{\chi'(\phi(x))}$.

Par composition, les trois fonctions α_k , β_k et γ_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: c'est clair pour α_k et β_k , et pour γ_k si $|k| < 1$. Si $|k| = 1$, ϕ est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ donc $1 - k^2 \sin^2(\phi(x)) = \cos^2(\phi(x)) > 0$ et la composée par la fonction racine carrée est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\phi'(x) = \frac{1}{\chi'(\phi(x))} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi(x))} = \gamma_k(x)$ donc :

$$\alpha'_k(x) = \cos(\phi(x)) \phi'(x) = \beta_k(x) \gamma_k(x)$$

$$\beta'_k(x) = -\sin(\phi(x)) \phi'(x) = -\alpha_k(x) \gamma_k(x)$$

$$\gamma'_k(x) = \frac{-2k^2 \sin(\phi(x)) \cos(\phi(x)) \phi'(x)}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi(x))}} = -k^2 \alpha_k(x) \gamma_k(x)$$

$$\boxed{\alpha'_k = \beta_k \gamma_k \quad \beta'_k = -\alpha_k \gamma_k \quad \gamma'_k = -k^2 \alpha_k \beta_k}$$

5. Pour $k = 0$, on a, pour tout φ de $\mathbb{R}$: $\chi(\varphi) = \int_0^\varphi 1 \, du = \varphi$. D'où pour tout x de $\mathbb{R}$: $\phi(x) = x$, et donc :

$$\boxed{\alpha_0 = \sin \quad \beta_0 = \cos}$$

6. Pour $k = 1$, on a, pour tout φ de $]-\pi/2, \pi/2[$: $\chi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{\cos u} \, du = \left[\ln \left| \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]_0^\varphi = \ln \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $\phi(x) = \varphi$ avec $\begin{cases} \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^x \\ \varphi \in]-\pi/2, \pi/2[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(e^x) \Leftrightarrow \varphi = 2 \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$

d'où : $\phi(x) = 2 \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

$$\alpha_1(x) = \sin\left(2 \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(2 \text{Arctan}(e^x)) = -\frac{1 - \tan^2(\text{Arctan}(e^x))}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(e^x))} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \text{th } x$$

$$\beta_1(x) = \cos\left(2 \text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2 \text{Arctan}(e^x)) = \frac{2 \tan(\text{Arctan}(e^x))}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(e^x))} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{\text{ch } x}$$

$$\gamma_1(x) = \beta_1(x) = \frac{1}{\text{ch } x}$$

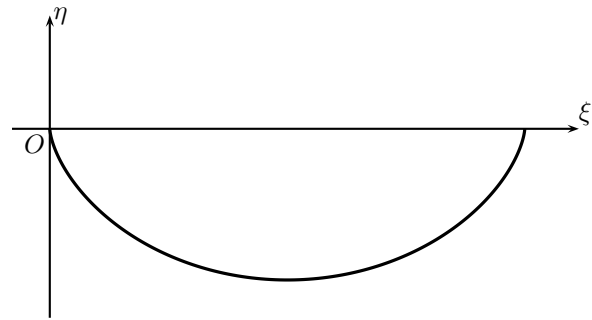
$$\boxed{\alpha_1 = \text{th} \quad \beta_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\text{ch}}}$$

PARTIE II

1. $\Gamma \begin{cases} \xi(u) = a(\pi + u + \sin u) \\ \eta(u) = a(-1 - \cos u) \end{cases}$, $u \in [-\pi, \pi]$. Pour tout u de $[-\pi, \pi]$, $\frac{M(u) + M(-u)}{2}$ a pour coordonnées $\begin{cases} a\pi \\ \eta(u) \end{cases}$ donc Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a\pi$, et il suffit d'étudier Γ sur $[0, \pi]$.

$\begin{cases} \xi'(u) = a(1 + \cos u) = 2a \cos^2 \frac{u}{2} \\ \eta'(u) = a \sin u = 2a \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad \frac{d\vec{M}}{du} = 2a \cos \frac{u}{2} \vec{T}$ avec $\vec{T} \begin{pmatrix} \cos \frac{u}{2} \\ \sin \frac{u}{2} \end{pmatrix}$ unitaire donc la tangente en tout point est dirigée par $\vec{T}$. En particulier, la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{i}$, celles en $M(-\pi)$ et $M(\pi)$ par $\vec{j}$.

u	0		π
$\xi'(u)$	$2a$	+	0
$\xi(u)$	πa	$\nearrow$	$2\pi a$
$\eta'(u)$	0	-	0
$\eta(u)$	$-2a$	$\nearrow$	0



2. Pour tout u de $[-\pi, \pi]$ $2a \cos \frac{u}{2} \geq 0$ donc $s(u) = \int_0^u 2a \cos \frac{t}{2} \, dt = \boxed{4a \sin \frac{u}{2}}$

La longueur de Γ est $\lambda(\Gamma) = s(\pi) - s(-\pi) = \boxed{8a}$

3. $\psi(u) = \left(\vec{j}, \vec{T} \right) = \left(\vec{j}, \vec{i} \right) + \left(\vec{i}, \vec{T} \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}$ donc $\frac{d^2\sigma}{d\tau^2}(\tau) = -g \cos \psi(u(\tau)) = -g \sin \frac{u(\tau)}{2}$

et comme $\sigma(\tau) = s(u(\tau)) = 4a \sin \frac{u(\tau)}{2}$, on a : $\frac{d^2\sigma}{d\tau^2}(\tau) + \frac{g}{4a} \sigma(\tau) = 0$.

La solution générale de cette équation différentielle est : $\sigma : \tau \mapsto A \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} \tau + B \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} \tau$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\sigma'(\tau) = -A\sqrt{\frac{g}{4a}} \sin \sqrt{\frac{g}{4a}}\tau + B\sqrt{\frac{g}{4a}} \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}\tau \text{ donc } \sigma'(0) = 0 \text{ impose } B = 0.$$

On a alors $\sigma(0) = \sigma_0$ si et seulement si $A = \sigma_0$.

$$\sigma : \tau \mapsto \sigma_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}\tau$$

La période de σ est $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, elle ne dépend pas de σ_0 .

PARTIE III

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est continue et positive sur $]a, b[$.

Au voisinage de a , $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{b-a}(x-a)^{1/2}}$ et par le critère d'équivalence, $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ converge.

De même, au voisinage de b , $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{b-a}(b-x)^{1/2}}$ d'où la convergence de $\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \text{ est convergente.}$$

$$(x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)x - ab = \frac{(a-b)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ suggère d'écrire } x \in]a, b[\text{ sous la forme}$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos t.$$

Soit donc le changement de variable défini par $t = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{a-b}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$.

$$I = \int_0^\pi \frac{-\frac{a-b}{2} \sin t \, dt}{\sqrt{-\frac{a-b}{2}(1-\cos t)\left(-\frac{a-b}{2}\right)(1+\cos t)}} = \int_0^\pi 1 \, dt = \pi$$

$$I = \pi$$

2. Établissons d'abord l'existence de $H(y_0)$ pour tout y_0 de $]0, \pi[$. La fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$ est continue et positive sur $] -y_0, y_0[$. Au voisinage de y_0 ,

$$\frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} = \frac{1}{\sqrt{-2 \sin \frac{y-y_0}{2} \sin \frac{y+y_0}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin y_0}(y_0 - y)^{1/2}} \text{ donc par le critère d'équivalence,}$$

$$\int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} \text{ converge.}$$

Par parité, l'intégrale converge aussi à la borne $-y_0$, d'où la convergence de $H(y_0)$.

Toujours par parité, $H(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-y_0}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} = \sqrt{2} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$ et sur l'intervalle $[0, y_0[$ il est loisible d'utiliser $t = \cos y$ comme nouvelle variable.

$$H(y_0) = \sqrt{2} \int_1^{\cos y_0} \frac{-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{t - \cos y_0}} = \sqrt{2} \int_{t_0}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t-t_0)}} dt \text{ en notant } t_0 = \cos y_0.$$

$$\text{Pour tout } t \text{ de }]t_0, 1], \text{ on a : } \frac{1}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t-t_0)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} \frac{1}{\sqrt{1+t_0}}$$

En intégrant ces inégalités sur $]t_0, 1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} H(y_0) \leq \frac{1}{\sqrt{1+t_0}} \int_{t_0}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}}$$

$$\text{D'après le 1. } \int_{t_0}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} = I = \pi \text{ donc } \pi \leq H(y_0) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t_0}} \pi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos y_0}} \pi.$$

Comme $\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos y_0}} = 1$, on en déduit que $H(y_0)$ possède une limite lorsque y_0 tend vers 0, et que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} H(y_0) = \pi.$$

3. La fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^\alpha}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$. Au voisinage de 1, en posant $u = 1 - h$, on a : $u^\alpha = (1 - h)^\alpha = 1 - \alpha h + o(h)$ donc $1 - u^\alpha = \alpha h + o(h) = \alpha(1 - u) + o(1 - u)$

On a donc $\frac{1}{\sqrt{1-u^\alpha}} \underset{u \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\alpha}(1-u)^{\frac{1}{2}}}$ et par le critère d'équivalence,

$$\text{pour tout réel } \alpha > 0, \quad \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^\alpha}} \text{ converge.}$$

$$K(2) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\text{Arcsin } u \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$K(2) = \frac{\pi}{2}$$

4. En posant $Y_1 = y$ et $Y_2 = y'$, l'équation $y'' = f(y)$ équivaut au système autonome $\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = f(Y_1) \end{cases}$, et les conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ équivalent à $\begin{cases} Y_1(t_0) = y_0 \\ Y_2(t_0) = y'_0 \end{cases}$.

Une condition suffisante pour que le problème de Cauchy $\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = f(Y_1) \\ Y_1(t_0) = y_0 \\ Y_2(t_0) = y'_0 \end{cases}$ admette, pour tout (t_0, y_0, y'_0) de $\mathbb{R}^3$

donné, une solution maximale unique est que la fonction $(Y_1, Y_2) \mapsto (Y_2, f(Y_1))$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Cela équivaut à dire que f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Une condition suffisante pour que le problème (1) admette une solution maximale unique est que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. On a, pour tout t de $\mathbb{R}$, $y''(t) = f(y(t))$, donc $2y'(t)y''(t) = 2f(y(t))y'(t)$ soit encore $\frac{dy'^2}{dt}(t) = \frac{d(F \circ y)}{dt}(t)$ et en prenant les primitives nulles en t_0 : $y'^2(t) - y_0'^2 = F(y(t))$. D'où $y'^2(t) = G(y(t))$. Donc, sans hypothèses supplémentaires,

toute solution de (1) est aussi solution de (2) : $y'^2(t) = G(y(t))$, $y(t_0) = y_0$

Les hypothèses sont en fait utiles pour établir une réciproque (non demandée) : si $y'^2(t) = G(y(t))$, alors :

– pour $t = t_0$, $y'^2(t_0) = y_0'^2$ et puisque $y'(t_0)$ et y'_0 sont de même signe, $y'(t_0) = y'_0$.
– par dérivation, $2y'(t)y''(t) = 2f(y(t))y'(t)$ donc sur un intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$ pour lequel y' garde un signe constant, par continuité y' ne s'annule pas et il vient après simplification $y''(t) = f(y(t))$.

6. Si $y'(t_0) = y'_0 \neq 0$ alors par continuité, il existe un intervalle J contenant t_0 sur lequel y' garde le signe de y'_0 . La fonction y est alors strictement monotone, donc injective sur J .

Si $y'_0 \neq 0$, il existe un intervalle J contenant t_0 tel que y soit injective sur J .

Pour tout t de J , $y'(t)$ est du signe de ϵ , et $G(y(t)) = y'^2(t) > 0$.

$y'^2(t) = G(y(t))$ équivaut alors à $\frac{y'(t)}{\sqrt{G(y(t))}} = \epsilon$.

En prenant les primitives nulles en t_0 : $\int_{t_0}^t \frac{y'(u)}{\sqrt{G(y(u))}} du = \epsilon(t - t_0)$. Comme y est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

de J sur $y(J)$, le changement de variable $v = y(u)$ est licite, et on a aussi : $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv = \epsilon(t - t_0)$. Comme $\epsilon = \pm 1$,

$$\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } J, \quad t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\epsilon}{\sqrt{G(v)}} dv.}$$

7. $f : y \mapsto -\omega^2 \sin y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et nous sommes dans les conditions d'application du **6.** avec $t_0 = y_0 = 0$, $y'_0 = \mu\omega > 0$ et $\epsilon = 1$. Il existe donc un intervalle J contenant 0 tel que pour tout t de J ,

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_0^{y(t)} \frac{dv}{\sqrt{\int_0^v (-2\omega^2 \sin u) du + \mu^2 \omega^2}} = \int_0^{y(t)} \frac{dv}{\omega \sqrt{[2 \cos u]_0^v + \mu^2}} = \int_0^{y(t)} \frac{dv}{\omega \mu \sqrt{1 - \frac{2}{\mu^2}(1 - \cos v)}} \\ &= \int_0^{y(t)} \frac{dv}{\omega \mu \sqrt{1 - \frac{4}{\mu^2} \sin^2 \frac{v}{2}}} \stackrel{(\varphi=v/2)}{=} \int_0^{y(t)/2} \frac{2 d\varphi}{\omega \mu \sqrt{1 - \frac{4}{\mu^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\omega \mu} \chi(y(t)/2) \end{aligned}$$

avec $k = \pm \frac{2}{\mu} \in]-1, 1[$.

$$\chi(y(t)/2) = \frac{\omega \mu}{2} (t - t_0) \Leftrightarrow \frac{y(t)}{2} = \phi\left(\frac{\omega \mu}{2} (t - t_0)\right) \text{ d'où } \sin(y(t)/2) = \sin\left(\phi\left(\frac{\omega \mu}{2} (t - t_0)\right)\right) = \alpha_k\left(\frac{\omega \mu}{2} (t - t_0)\right)$$

$$\boxed{\exists J \text{ intervalle contenant } 0 \text{ tel que pour tout } t \text{ de } J, \quad \sin(y(t)/2) = \alpha_k(\mu \omega (t - t_0)/2)}$$

8. a. La fonction $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est continue, positive sur $]y_0, y_1[$. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, et par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au voisinage de y_0 , on a :

$G(v) = G(y_0) + (v - y_0) \frac{dG}{dy}(y_0) + o(v - y_0)$ donc $G(v) \sim (v - y_0) \frac{dG}{dy}(y_0)$ et de plus, comme $G(y)$ est strictement positif sur $]y_0, y_1[$, on a $\frac{dG}{dy}(y_0) > 0$. Donc $\frac{1}{\sqrt{G(v)}} \sim \frac{1}{\sqrt{G'(y_0)}(v - y_0)^{\frac{1}{2}}}$. Grâce au critère d'équivalence pour

les intégrales impropres de fonctions positives, l'intégrale $\int_{y_0}^{\frac{y_0+y_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$ est convergente.

On a de même, au voisinage de y_1 , $G(v) \sim (v - y_1) \frac{dG}{dy}(y_1)$ ce qui implique :

$$\frac{dG}{dy}(y_1) < 0 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{G(v)}} \sim \frac{1}{\sqrt{-G'(y_1)}(y_1 - v)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d'où la convergence de } \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv.$$

$$\boxed{\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv \text{ est convergente.}}$$

b. Soit t dans $[t_0, t_1]$. Il existe un réel y et un seul dans $[y_0, y_1]$ tel que $t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$. En effet, la

fonction $y \mapsto t_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$ est continue, strictement croissante sur $[y_0, y_1]$, donc bijective, et son image

de $[y_0, y_1]$ est $[t_0, t_1]$. Comme de plus $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est continue sur $]y_0, y_1[$, la fonction $y \mapsto t_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]y_0, y_1[$ et sa dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque $t \mapsto y(t)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0, t_1[$ et par dérivation de l'égalité $t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$, on obtient : $1 = \frac{1}{\sqrt{G(y(t))}} y'(t)$ d'où

$$y'^2(t) = G(y(t)).$$

$v \mapsto \frac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est en fait, comme F , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]y_0, y_1[$, donc $t \mapsto y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]t_0, t_1[$. Comme $y(t_0) = y_0$, y est solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (2), donc de (1), ainsi qu'il est admis dans l'énoncé. Par unicité, la fonction y ainsi définie sur $[t_0, t_1]$ est la solution de (1) sur cet intervalle.

On a obtenu : $\forall t \in]t_0, t_1[, y'(t) = \sqrt{G(y(t))} > 0$, donc

$$\boxed{\text{La solution } y \text{ de (1) sur } \mathbb{R} \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [t_0, t_1].}$$

c. Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(t) = y(2t_1 - t)$.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, $s'(t) = -y'(2t_1 - t)$ et $s''(t) = y''(2t_1 - t) = f(y(2t_1 - t)) = f(s(t))$

De plus, $s(t_1) = y(t_1) = y_1$ et $s'(t_1) = -y'(t_1) = 0$ puisque $y'^2(t_1) = G(y(t_1)) = G(y_1) = 0$.

s vérifie (1) avec les mêmes conditions initiales que y en t_1 , donc par unicité $s = y$.

L'application $t \mapsto 2t_1 - t$ est décroissante et transforme le segment $[t_0, t_1]$ en $[t_1, 2t_1 - t_0]$, donc, puisque y est strictement croissante sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, elle est strictement décroissante sur $[t_1, 2t_1 - t_0]$.

La solution y de (1) sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[t_1, 2t_1 - t_0]$.

d. Soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(2t_1 - 2t_0 + t)$.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, $z''(t) = y''(2t_1 - 2t_0 + t) = f(y(2t_1 - 2t_0 + t)) = f(z(t))$

On déduit du **c.** que $z(t_0) = y(2t_1 - t_0) = y(t_0)$,

et $z'(t_0) = y'(2t_1 - t_0) = -y'(t_0) = 0$.

Par unicité de solution de (1), il en résulte que $z = y$, donc pour tout t de $\mathbb{R}$, $y(2t_1 - 2t_0 + t) = y(t)$.

y est périodique de période $2 \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}} dv$.

9. Nous sommes dans les conditions d'application du **8.** puisque $G(y) = -2\omega^2 \int_{y_0}^y \sin u \, du = 2\omega^2(\cos y - \cos y_0)$ donc $G(y_0) = 0$, $G'(y_0) = -2\omega^2 \sin y_0 \neq 0$, et en posant $y_1 = -y_0 \in]0, \pi[$, on a : $G(y_1) = 0$, $G'(y_1) = -G'(y_0) \neq 0$, et enfin pour tout y de $]y_0, y_1[$, $G(y) = 2\omega^2(\cos y - \cos y_0) > 0$.

La solution y du problème (1) est alors une fonction périodique, de période

$$P = 2 \int_{y_0}^{-y_0} \frac{dv}{\sqrt{2\omega^2(\cos v - \cos y_0)}} = \frac{2}{\omega} \int_{y_0}^{-y_0} \frac{dv}{\sqrt{\cos v - \cos y_0}}.$$

$$P = \frac{2}{\omega} H(-y_0).$$

En appliquant le résultat du **2.** (licite puisque $\cos(-y_0) = \cos y_0$), on obtient

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

10. Nous sommes dans les conditions d'application du **8.** puisque $G(y) = -2 \int_{y_0}^y \lambda u^3 \, du = -\frac{\lambda}{2} (y^4 - y_0^4)$ donc $G(y_0) = 0$, $G'(y_0) = -2\lambda y_0^3 \neq 0$, et en posant encore $y_1 = -y_0 > 0$, on a : $G(y_1) = 0$, $G'(y_1) = -G'(y_0) \neq 0$, et enfin pour tout y de $]y_0, y_1[$, $|y| < |y_0|$ donc $y^4 < y_0^4$ d'où $G(y) > 0$.

La solution y du problème (1) est alors une fonction périodique, de période

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{y_0}^{-y_0} \frac{dv}{\sqrt{\frac{-\lambda}{2} (v^4 - y_0^4)}} \stackrel{(\text{parité})}{=} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{-y_0} \frac{dv}{\sqrt{y_0^4 - v^4}} \stackrel{(u=-\frac{v}{y_0})}{=} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{-y_0 \, du}{\sqrt{y_0^4 - y_0^4 u^4}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{(-y_0)\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \end{aligned}$$

$$P = \frac{4\sqrt{2}}{(-y_0)\sqrt{\lambda}} K(4).$$