

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE MATH 2 PSI 2000

courbes de Bézier

Les figures sont laissées au bon soin des lecteurs.

1 PARTIE

1. On a $B_F(t) = (1-t)P_0 + tP_1$. Le point courant est donc un barycentre de P_0 et P_1 . On peut aussi écrire

$$B_F(t) = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1}, t \in [0, 1]$$

La trajectoire de l'arc est donc le segment $[P_0, P_1]$

2. On peut remarquer que pour $t = 1/2$, $B_{n\{P_0 \dots P_n\}}(1/2)$ est le milieu de $B_{n-1, \{P_0 \dots P_{n-1}\}}(1/2)$ et de $B_{n-1, \{P_1 \dots P_n\}}(1/2)$.
En particulier $Q_0 = B(1/2)$, $Q_1 = B_{1\{P_1, P_2\}}(1/2)$. On vérifie bien que :

$$[B_F(1/2) \text{ est le milieu de } Q_0, Q_1]$$

De façon évidente :

$$[B_F(0) = P_0, B_F(1) = P_2]$$

On a $B_{1\{P_0, P_1\}}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ et $B_1(P_1, P_2)(t) = (1-t)P_1 + tP_2$. On a donc :

$$[B_F(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2]$$

On vérifie que la somme de coefficients est 1 : $(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1$

Par dérivation de la formule $B_F(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ qui est une fonction C^∞ sur $[0, 1]$ $B''_F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'accélération est constante. La trajectoire est donc un arc de parabole (grand classique de physique).

On peut refaire le calcul dans le repère $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sachant $B''(t) = 2\sqrt{2}u$, $B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$, $B(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$,

$$B(t) = \left(\sqrt{2}t^2 - \sqrt{2}t + 1/\sqrt{2} \right) u + \left(\sqrt{2}t - 1/\sqrt{2} \right) v$$

Soit $X = \frac{2Y^2+1}{2\sqrt{2}}$. En particulier l'axe de la parabole est (O, u) et le sommet est en $X = 1/(2\sqrt{2})$. C'est le point $B_{2,F}(1/2)$

On peut donc tracer la trajectoire sachant que c'est un arc de parabole d'extrémités P_0 et P_1 et passant par $B_F(1/2) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. Une étude un peu plus précise donne la tangente aux extrémités (cf Partie 4)

2 PARTIE

1. On peut remarquer que la définition d'un convexe est équivalente à :

$$\forall (M, N) \in \mathbb{K}, [M, N] \subset \mathbb{K}$$

- 1: Si la partie non vide vérifie :

$$n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \in \mathbb{K}$$

alors en prenant $n = 2$, $M_1 = M$, $M_2 = N$ et $\lambda_1 = \lambda$ on retrouve la définition du convexe.

- La réciproque se démontre par récurrence: On note H_n la proposition:

$$n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \in \mathbb{K}$$

- si $n = 1$ on a $M \in \mathbb{K} \Rightarrow M \in \mathbb{K}$: évident
- pour $n = 2$ on a la définition d'un convexe, donc la propriété H_2 est encore vraie.
- on suppose H_k vraie tout $1 \leq k < n$. Soit alors n points M_i de $\mathbb{K}$ et n scalaires positifs λ_i de somme 1.
On isole M_n et on écrit si $\lambda_n \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} M_i \right) + \lambda_n M_n$$

Or le point $P_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} M_i$ est dans $\mathbb{K}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i = (1 - \lambda_n) P_n + \lambda_n M_n$ est dans $\mathbb{K}$ par définition de $\mathbb{K}$.

Si $\lambda_n = 1$ alors $\sum \lambda_i M_i = M_n$ et le résultat est évident.

- **2:** Notons $(\mathbb{K}_w)_{w \in W}$ la famille de convexes contenant E et $\mathbb{K} = \bigcap_{w \in W} \mathbb{K}_w$
 - E étant non vide , l'intersection de parties contenant E est non vide. Donc $\mathbb{K}$ contient E et est non vide.
 - Si M et N sont deux points de $\mathbb{K}$, les deux points sont dans tous les $\mathbb{K}_w$ qui sont convexes. le segment $[M, N]$ est donc inclus dans tous les $\mathbb{K}_w$ donc dans leur intersection.

$\boxed{\text{L'intersection de convexes contenant } E \text{ est un convexe contenant } E}$

- **3:**
 - D'après la propriété précédente l'enveloppe convexe, qui est l'intersection de tous les convexes contenant E , est un convexe donc : $E = C(E) \Rightarrow E$ convexe
 - Réciproquement si E est un convexe $C(E)$ est l'intersection de E avec d'autres convexes donc $C(E) \subset E$. De plus par l'intersection des convexes contenant E contient E donc $E \subset C(E)$.Par double inclusion on a $C(E) = E$

$$\boxed{C(E) = E \Leftrightarrow E \text{ est convexe}}$$

- **4:** Si H contient G , $C(H)$ est un convexe contenant G (car $C(H)$ contient H) . Donc $C(H)$ contient le plus petit convexe contenant G soit $C(G)$.

$$\boxed{G \subset H \Rightarrow C(G) \subset C(H)}$$

- **5:** Soit $K(E) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (M_i)_{i=1}^n \in E^n, \exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \}$
 - On a $K(E) \subset C(E)$: En effet les points M_i sont dans E donc dans $C(E)$. Or $C(E)$ est convexe d'après II12 donc $C(E)$ contient M d'après II11
 - On a $C(E) \subset K(E)$: Pour cela montrons que $K(E)$ est un convexe contenant E . Il contiendra alors le plus petit:
 - * Si $M \in E$ alors $M \in K(E)$: prendre $n = 1, \lambda_1 = 1, M_1 = M$
 - * Si M et N sont dans $K(E)$ on a par construction : $M = \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k$ et $N = \sum_{l=1}^{nn} \mu_l N_l$. Pour montrer que $K(E)$ est convexe, on revient à la définition en montrant que

$$(1 - \lambda)M + \lambda N \in K(E)$$

Or

$$(1 - \lambda)M + \lambda N = \sum_{k=1}^n (1 - \lambda) \lambda_k M_k + \sum_{l=1}^{nn} \lambda \mu_l N_l$$

Ce point est le barycentre de $n + nn$ points de E affectés de coefficients positifs ($0 \leq \lambda \leq 1, \lambda_k \geq 0, \mu_l \geq 0$) de somme $\sum_{k=1}^n (1 - \lambda) \lambda_k + \sum_{l=1}^{nn} \lambda \mu_l = (1 - \lambda) + \lambda = 1$. Le point $(1 - \lambda)M + \lambda N$ est dans $K(E)$. On a bien vérifié que $K(E)$ es convexe:

$$\boxed{C(E) = \{ M \in \mathbb{R}^2, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (M_i)_{i=1}^n \in E^n, \exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{+n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \}}$$

- **6:** On montre par récurrence H_n : pour tout famille F de cardinal $n + 1 \forall t \in [0, 1]$, $B_{n,F}(t) \in C(E)$
 - pour $n = 0$ $B_{n,F}(t) = P_0$ et $C(P_0) = P_0$
 - On suppose H_k vraie pour $0 \leq k < n$. On a par définition:

$$B_{n,F}(t) = (1 - t)B_{n-1,\{P_0 \dots P_{n-1}\}}(t) + tB_{n-1,\{P_1 \dots P_n\}}(t)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $B_{n-1,\{P_0 \dots P_{n-1}\}}(t) \in C(P_0 \dots P_{n-1})$.

Or d'après II14: $(P_0 \dots P_{n-1}) \subset F \Rightarrow C(P_0 \dots P_{n-1}) \subset C(F)$ donc $B_{n-1,\{P_0 \dots P_{n-1}\}}(t) \in C(F)$

De même : $B_{n-1,\{P_1 \dots P_n\}}(t) \in C(F)$. Comme $C(F)$ est convexe, on peut appliquer à ces deux points la définition d'un convexe: $B_{n,F}(t) \in C(F)$

2. ϕ est une application affine du plan si et seulement si il existe une application linéaire f telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = f(\overrightarrow{AB})$$

Ou encore $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2, \phi(B) = \phi(A) + f(\overrightarrow{AB})$

Vérifions par récurrence H_n : pour tout famille F de cardinal $n + 1$ on a $\phi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\phi(F)}(t)$:

- pour $n = 0$ tous les ensembles sont réduits à un point et le résultat est évident.
- Si la propriété est vraie pour tout $k < n$ on peut dire que :

$$\phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)) = B_{n-1,\{\phi(P_0)\dots\phi(P_{n-1})\}}(t)$$

et

$$\phi(B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)) = B_{n-1,\{\phi(P_1)\dots\phi(P_n)\}}(t)$$

On a par construction:

$$B_{n,F}(t) = (1-t)B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t) + tB_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)$$

En prenant $A = B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}$ et $B = B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}$ on a donc :

$$\begin{aligned} \phi(B_{n,F}(t)) &= \phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)) + f\left(\overrightarrow{tB_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)}\right) \\ &= \phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)) + tf\left(\overrightarrow{B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)}\right) \text{ (linéarité)} \\ &= \phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)) + t(\phi(B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)) - \phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t))) \\ &= (1-t)\phi(B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t)) + t\phi(B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t)) \\ &= (1-t)B_{n-1,\{\phi(P_0)\dots\phi(P_{n-1})\}}(t) + tB_{n-1,\{\phi(P_1)\dots\phi(P_n)\}}(t) = B_{n,\phi(F)}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\phi(F)}(t)}$$

- *Remarque : on peut aussi séparer le problème en deux en disant que tout application affine est le composé d'une application linéaire et d'une translation . En montrant la propriété si ϕ est linéaire , puis si ϕ est une translation on peut alors conclure.*

3. Si P_0, P_1, P_2 est un triangle non aplati , il existe une transformation affine qui envoie le triangle de la question I2.4 sur ce triangle. $M = xi + yj \rightarrow P_0 + x\overrightarrow{P_0P_1} + y\overrightarrow{P_0P_2}$.

La courbe de Bézier associé est donc l'image par cette transformation de l'arc de parabole. C'est donc un arc de parabole .

3 PARTIE

1. • **1:** On veut montrer par récurrence H_n :

$$\exists (b_{n,k})_{k=0}^n, \forall (P_k)_{k=0}^n, \forall t \in [0, 1], B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k}(t)P_k$$

on notera que les coefficients $b_{n,k}$ doivent être indépendant des (P_k)

- pour $n = 0$: $\forall t \in [0, 1] B_{0,P}(t) = P$ donc $b_{0,0} = 1$ convient et est l'unique solution.
- Si la famille $(b_{m,k})$ existe pour tout $m < n$ alors on a :

$$\begin{aligned} B_{n-1,\{P_0,\dots,P_{n-1}\}}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t)P_k \\ B_{n-1,\{P_1,\dots,P_n\}}(t) &= \sum_{k=1}^n b_{n-1,k-1}(t)P_k \end{aligned}$$

donc par définition de $B_{n,\{P_0,\dots,P_n\}}(t)$:

$$\begin{aligned} B_{n,F}(t) &= (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t)P_k + t \sum_{k=1}^n b_{n-1,k-1}(t)P_k \\ &= (1-t)b_{n-1,0}(t)P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left((1-t)b_{n-1,k}(t) + tb_{n-1,k-1}(t) \right) P_k + tb_{n-1,n-1}(t)P_n \end{aligned}$$

on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} b_{n,0}(t) = (1-t)b_{n-1,0}(t) \\ \forall k \in [[1..n-1]], b_{n,k}(t) = (1-t)b_{n-1,k}(t) + tb_{n-1,k-1} \\ b_{n,n}(t) = tb_{n-1,n-1}(t) \end{cases}}$$

D'où l'existence des coefficients définis par ces relations de récurrences.

On vérifie alors par récurrence que les coefficients sont des polynômes de degré $\leq n$.

- Par prudence on vérifie les formules pour $n = 1$ et $n = 2$ à l'aide du I :

$$b_{1,0} = (1-t) \times 1 = (1-t), b_{1,1} = t \times 1 = t$$

$$b_{2,0} = (1-t)(1-t) = (1-t)^2, b_{2,1} = t(1-t) + (1-t)t = 2t(1-t), b_{2,2} = t \times t = t^2$$

- **2:** On peut continuer à appliquer la récurrence :

$$\begin{aligned} b_{3,0} &= (1-t)b_{2,0} = (1-t)^3, b_{3,1} = (1-t)b_{2,1} + tb_{2,0} = 3t(1-t)^2 \\ b_{3,2} &= (1-t)b_{2,2} + tb_{2,1} = 3t^2(1-t), b_{3,3} = tb_{2,2} = t^3 \end{aligned}$$

- **3:** On doit commencer à voir sortir la récurrence . Sinon on calcule pour $n = 4$:

$$b_{4,0} = (1-t)^4, b_{4,1} = 4t(1-t)^3, b_{4,2} = 6t^2(1-t)^2, b_{4,3} = 4t^3(1-t), b_{4,4} = t^4$$

On doit deviner assez vite $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0, n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$

La formule se vérifie par récurrence sur n en prenant : $H_n : \forall k \in [[0, n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$:

- pour $n = 0 \dots 4$ la formule est vérifiée
- Si elle est vraie pour tout $m < n$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n,0}(t) = (1-t)b_{n-1,0}(t) = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)^n \\ \forall k \in [[1..n-1]], b_{n,k}(t) = (1-t)b_{n-1,k}(t) + tb_{n-1,k-1} \\ \quad = (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) t^k (1-t)^{n-k} \\ \quad = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \text{ (Formule de pascal)} \\ b_{n,n}(t) = tb_{n-1,n-1}(t) = t \times t^{n-1} = t^n \end{array} \right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0, n]], b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}}$$

- **4)** On remarque avec le binôme de Newton: $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(t) = (1-t+t)^n = 1$ donc en intégrant :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n I_{n,k} = 1}$$

Il n'y a pas de problèmes théoriques , la somme admet un nombre fini de terme et les fonctions sont continues, donc intégrables sur un segment .

- **5)** On a $I_{n,k} = C_n^k \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dt$. On peut intégrer par partie en posant $u(t) = t^k$ et $v(t) = -\frac{(1-t)^{n-k+1}}{n-k+1}$ qui sont bien deux fonctions C_1 sur $[0, 1]$:

$$I_{n,k} = C_n^k \frac{k}{(n-k+1)} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{n-k+1} dt = C_n^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{n-k+1} dt = I_{n,k-1}$$

toutes les intégrales sont égales quand k décrit $[[0, n]]$. Comme leur somme vaut 1:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0, n]], I_{n,k} = \frac{1}{n+1}}$$

2. On a :

$$B_{n,\tilde{F}}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} P_{n-k} = \sum_{l=0}^n C_n^{n-l} t^{n-l} (1-t)^l P_l \text{ avec le changement } l = n-k$$

et donc comme $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\boxed{B_{n,\tilde{F}}(t) = B_{n,F}(1-t)}$$

les deux trajectoires sont les mêmes . Seul change le sens de parcours.

4 PARTIE

1.

- **1:**Le sujet demande ensuite de retrouver le III.3 . Il ne faut donc pas utiliser l'expression de $b_{n,k}$ pour calculer Z .
 - pour $i = 0$ $C_{0,j}(t) = B_{0,\{P_j\}}(t) = P_j = \psi_t(S^j)$
 - pour $i = 1$: $C_{1,j}(t) = B_{1,\{P_j, P_{j+1}\}}(t) = (1-t)P_j + tP_{j+1} = \psi_t((1-T)S^j + TS^{j+1}) = \psi_t((1-T+TS)S^j)$
donc si Z existe $Z = 1-T+TS$
 - pour $i = 2$: $C_{2,j}(t) = (1-t)^2P_j + 2t(1-t)P_{j+1} + t^2P_{j+2}$ d'après I2 et donc :

$$C_{2,j}(t) = \psi_t((1-T)^2S^j + 2T(1-T)S^{j+1} + T^2S^{j+2}) = \psi_t(((1-T)^2 + 2TS(1-T) + T^2S^2)S^j)$$

le coefficient de S^j est bien $(1-T+TS)^2$

- On pose donc l'hypothèse de récurrence : $H_i : \forall j \in [0..n-i], C_{i,j}(t) = \psi_t(Z^i S^j)$
 - * elle est vérifiée pour $i = 0, 1, 2$
 - * Si elle est vraie pour $i-1$ on a :

$$C_{i-1,j}(t) = \psi_t(Z^{i-1}S^j) \text{ et } C_{i-1,j+1}(t) = \psi_t(Z^{i-1}S^{j+1})$$

Donc d'après la récurrence définissant les courbes de Bézier:

$$\begin{aligned} C_{i,j}(t) &= B_{i,\{P_i \dots P_{i+j}\}}(t) = (1-t)B_{i-1,\{P_i \dots P_{i+j-1}\}}(t) + tB_{i-1,\{P_{i+1} \dots P_{i+j}\}}(t) \\ &= (1-t)C_{i-1,j}(t) + tC_{i-1,j+1}(t) = (1-t)\psi_t(Z^{i-1}S^j) + t\psi_t(Z^{i-1}S^{j+1}) \\ &= \psi_t((1-T)Z^{i-1}S^j + TZ^{i-1}S^{j+1}) = \psi_t((1-T+TS)Z^{i-1}S^j) = \psi_t(Z^i S^j) \end{aligned}$$

$$\boxed{Z = (1-T+TS)}$$

- Remarque: On utilise plusieurs fois que si P est un polynôme de la seule variable T alors pour tout polynôme Q on a : $\psi_t(PQ) = P(t)\psi_t(Q)$. La vérification se fait pour une base ce qui suffit par linéarité:
 - * si $P = T^a$ et $Q = T^\alpha S^\beta$ on a alors : $\psi_t(PQ) = \psi_t(T^{a+\alpha}S^\beta) = t^{a+\alpha}P_\beta = t^a(t^\alpha P_\beta) = t^a\psi_t(Q)$.

- **2:**En particulier pour $i = 0$ et $j = n$:

$$\begin{aligned} B_{n,F}(t) &= C_{0,n}(t) = \psi_t((1-T+TS)^n) = \psi_t\left(\sum_{k=0}^n C_n^k T^k (1-T)^{n-k} S^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} P_k . \text{ On retrouve } b_{n,k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

- **3:** comme $B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} P_k$, $\boxed{B_{n,F}(0) = P_0, B_{n,F}(1) = P_n}$
- **4:** ψ_t et la dérivation étant linéaire la relation est vérifiée pour tout polynôme W si et seulement si elle est vérifiée sur une base . Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_t(T^i S^j) &= \frac{d}{dt}(t^i P_j) = it^{i-1}P_j \text{ si } i > 0 \\ \psi_t\left(\frac{\partial T^i S^j}{\partial T}\right) &= \psi_t(iT^{i-1}S^j) = it^{i-1}P_j \end{aligned}$$

d'où l'égalité si $i \neq 0$. Si $i = 0$ on a deux expressions nulles.

$$\boxed{\forall W \in V, \frac{d}{dt}(\psi_t W) = \psi_t\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)}$$

- **5:**D'après cette règle de dérivation on a comme : $\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{\partial(1-T+TS)}{\partial T} = S - 1$

$$\frac{d}{dt}B_{n,F}(t) = \frac{d}{dt}\psi_t(Z^n) = \psi_t\left(\frac{\partial(Z^n)}{\partial T}\right) = \psi_t(nZ^{n-1}S - nZ^{n-1}) = n(C_{n-1,1}(t) - C_{n-1,0}(t))$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}B_{n,F}(t) = n(C_{n-1,1}(t) - C_{n-1,0}(t))}$$

- **6:**Si $t = 0$ on sait que $B_{n,\{P_0 \dots P_n\}}(0) = P_0$, et donc :

$$\frac{d}{dt}B_{n,F}(0) = n(C_{n-1,1}(0) - C_{n-1,0}(0)) = n(P_1 - P_0) = n\overrightarrow{P_0 P_1}$$

. La tangente au point de paramètre $t = 0$ à la courbe est la droite $P_0 P_1$.

A cause de la symétrie démontrée à la question III.2.2 , La tangente au point de paramètre $t = 1$ à la courbe est la droite $P_{n-1} P_n$.

- *Remarque : on peut trouver aussi le résultat en dérivant la formule du III avec les $b_{n,k}$*
- *Remarque:Retour sur la parabole du I2 : on a les tangentes au points de paramètres 0 et 1 .Le calcul précédent donne aussi que la tangente au point de paramètre 1/2 est la droite Q_0Q_1 .*
- **7:** on a $Z = 1 - T + ST$ qui est une fonction affine de T de dérivée $(S - 1)$ on a donc :

$$\frac{\partial^k (Z^n)}{\partial T^k} = \frac{n!}{(n-k)!} (S-1)^k Z^{n-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

Par dérivation successive on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} B_{n,F}(t) &= \frac{n!}{(n-k)!} \psi_t((S-1)^k Z^{n-k}) = \psi_t \left(\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} Z^{n-k} S^j \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} C_{n-k,j}(t) \end{aligned}$$

En particulier

$$\boxed{\frac{d^k}{dt^k} B_{n,F}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} P_j}$$

Ce vecteur ne dépend que des points $P_0 \cdots P_k$.

- En particulier $\frac{d^2}{dt^2} B_{n,F}(0) = \overrightarrow{P_1 P_0} - \overrightarrow{P_2 P_1}$
2. On remarque que par symétrie S par rapport à O P_0 et P_3 sont échangés ainsi que P_1 et P_2 . D'autre par la symétrie est une application affine donc :

$$B_{3,F}(t) = B_{3,\tilde{F}}(1-t) = B_{3,S(F)}(1-t) = S(B_{3,F}(1-t))$$

les points de paramètre t et $1-t$ s'échangent par la symétrie.

Les tangentes aux points P_0 et P_3 sont connus . Ce sont les droites P_0P_1 et P_2P_3 .

par symétrie $B_{3,F}(1/2) = O$. La tangente en ce point admet le vecteur directeur (s'il est non nul)

$$\frac{d}{dt} B_{n,F}(t) = 3 (C_{2,1}(1/2) - C_{2,0}(1/2)) = 3 (B_{3,\{P_0,P_1,P_2\}}(1/2) - B_{3,\{P_1,P_2,P_3\}})$$

donc si $C_{2,1}(1/2) \neq C_{2,0}(1/2)$, ces deux points définissent la tangente en O à la courbe . Or on a vu en I2 comment les construire par milieux successifs. Or le milieu de P_1P_2 est O .La tangente en O est donc la droite qui joint les milieux de P_0P_1 et P_2P_3 .

On peut faire une étude plus classique en étudiant la courbe paramétrée: $\begin{cases} x(t) = (t-1)^3 + t^3 \\ y(t) = 6t^2(1-t) + 6t(1-t)^2 \end{cases}$

5 PARTIE:

1. On notera que les points variables sont les points $(P_k)_{k=0}^n$. Le sujet pose donc $P_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

Par contre les points M_i et les paramètres t_i sont des constantes .

On a $B_{n,F}(t_k) = \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) P_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) x_i \\ \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) y_i \end{pmatrix}$. Donc

$$f(x_0 \cdots y_n) = \sum_{k=1}^q \left(\alpha_k - \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) x_i \right)^2 + \left(\beta_k - \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) y_i \right)^2$$

C'est un polynôme par rapport aux variables x_i et y_i γ est C^1 sur $\mathbb{R}^{2n+2}$

2. On a donc avec les notations du V3 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X, Y) = \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \left(\alpha_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) x_i \right)$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(X, Y) = \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \left(\beta_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) y_i \right)$$

3. On sait que si une fonction f C^1 sur un ouvert U présente un minimum local en un point de U alors ce point est un point critique où les vecteurs dérivées sont tous nuls . Donc ici :

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) (\alpha_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) x_i) = 0 \\ \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) (\beta_k - b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) y_i) = 0 \end{array} \right.$$

soit

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^q b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) x_i \\ \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \beta_k = \sum_{k=1}^q b_{n,j}(t_k) \sum_{i=0}^n b_{n,i}(t_k) y_i \end{array} \right.$$

Les deux systèmes sont indépendants

$$\forall j \in [0..n] \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \alpha_k = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=1}^q b_{n,j}(t_k) b_{n,i}(t_k) \right) x_i \\ \sum_{k=1}^q 2b_{n,j}(t_k) \beta_k = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=1}^q b_{n,j}(t_k) b_{n,i}(t_k) \right) y_i \end{array} \right.$$

$$\boxed{A = (a_{i,j}) \text{ avec } a_{i,j} = \sum_{k=1}^q b_{n,i}(t_k) b_{n,j}(t_k)}$$

$$\boxed{U = (u_i) \text{ avec } u_i = \sum_{k=1}^q 2b_{n,i}(t_k) \alpha_k}$$