

EXERCICE n° 1

1. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Je considère que $t \mapsto t^\alpha$ est continue en 0; en effectuant le prolongement par continuité car $\alpha > 0$ en posant $0^\alpha = 0$.

De plus $\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha n}}$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha n}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\alpha n > 1$ car $n \geq 1$ et $\alpha > 1$.

Ainsi par comparaison à une fonction positive, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

d'où $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt = I_n$

- (b) La fonction $u \mapsto \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ car $\frac{1}{\alpha} > 0$ et $n^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ selon le théorème de la bijection car $\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = +\infty$

Le changement de variable $t = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$; $dt = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} du$ conserve donc la nature de l'intégrale et sa valeur, d'après le cours. Ainsi on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du$$

Par linéarité, comme $\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du$ converge.

De plus, $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$

donc $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geq 0$. On a $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k} = 1 + u + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k}$

or $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k} \geq 0$ somme potentiellement vide de réels positifs

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geq 0, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u$

2. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right)\right)$

Or $\frac{u}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \sim \frac{u}{n}$

Ainsi $n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \sim u$ donc $n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \rightarrow u$

comme \exp est continue en u , on a par composition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} = \frac{1}{u^{1-1/\alpha} (1+\frac{u}{n})^n}$.

(i) Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

(ii) Soit $u \in]0, +\infty[$. En utilisant 2), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \frac{1}{u^{1-1/\alpha} e^u} = u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}$.

Ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}$.

(iii) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ par théorèmes généraux.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$. On a $(1+\frac{u}{n})^n \geq 1+u > 0$ et $u^{1-1/\alpha} > 0$.

$$\text{donc } |f_n(u)| = \frac{1}{u^{1-1/\alpha} (1+\frac{u}{n})^n} \leq \frac{1}{u^{1-1/\alpha} (1+u)}$$

$$\text{Je pose } \varphi : u \mapsto \frac{1}{u^{1-1/\alpha} (1+u)}$$

φ est continue sur $]0, +\infty[$ par théorèmes généraux.

De plus, $\varphi(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{u^{1-1/\alpha}}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{1-1/\alpha}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $1 - 1/\alpha < 1$

donc φ est intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison à une fonction positive

Et $\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-1/\alpha}}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{2-1/\alpha}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 - 1/\alpha > 1$ et $\alpha > 1$

donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison à une fonction positive

Ainsi la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall u \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(u)| \leq \varphi(u)$$

Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a l'existence des membres et la limite :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f$$

ainsi la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

(b) D'après 1c), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{v_n}{\alpha n^{1/\alpha}}$ et d'après la question précédente : $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

or $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} f > 0$ car f positive et continue sur $]0, +\infty[$ et non identiquement nulle car $f(1) = 1/e$

donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ d'où $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha n^{1/\alpha}}$

4. (a) On peut utiliser **proprement** la règle de D'Alembert. Cependant on remarque que $0 < 1/\alpha < 1$, donc d'après la question précédente $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ et $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(I_n)$

Or les séries entières $\sum_{n \geq 1} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n$ sont toutes deux de rayon 1.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ est $R = 1$

(b) Soit $x \in]-\mathbf{R}, \mathbf{R}[$. On a $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je note $g_n : t \mapsto \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n$ définie sur $[0, +\infty[$. Je considère que g_n est définie en 0 car je prolonge par continuité $t \mapsto t^\alpha$ par la valeur 0 car $\alpha > 0$. Ainsi $g_n(0) = x^n$.

(i) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$, par théorèmes généraux.

(ii) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a $\left|\frac{x}{1+t^\alpha}\right| = \frac{|x|}{1+t^\alpha} \leq |x| < 1$.

On donc convergence de la série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n = \frac{\frac{x}{1+t^\alpha}}{1 - \frac{x}{1+t^\alpha}} = \frac{x}{1+t^\alpha - x}$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ de somme $g : t \mapsto \frac{x}{1+t^\alpha - x}$.

(iii) La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ par théorèmes généraux car $\forall t \geq 0, 1+t^\alpha - x \geq 1-x > 0$.

(iv) Par linéarité, la fonction g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ à l'aide de 1(a)).

(v) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{|x|^n}{(1+t^\alpha)^n} dt = |x|^n \mathbf{I}_n$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} |x|^n \mathbf{I}_n$ converge car on a convergence absolue de la série entière en tout point de l'intervalle ouvert de convergence.

donc la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$ converge.

Avec (i), (ii), (iii), (iv) et (v), le théorème d'intégration terme à terme s'applique ainsi g est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} g$$

Ce qui permet de conclure que : $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x} dt$

EXERCICE n° 2

1. (a) D'un côté la j -ème colonne de la matrice A est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(e_j))$ colonne des coefficients de $u(e_j)$ dans la base \mathcal{B} . Ainsi $a_{i,j}$ qui le coefficient de la matrice A situé à la i -ème ligne et la j -ème colonne est la i -ème coordonnée du vecteur $u(e_j)$.

D'un autre côté comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, la i -ème coordonnée dans \mathcal{B} du vecteur $u(e_j)$ est $(u(e_j)|e_i)$.

$$\text{Ceci justifie que : } \boxed{a_{i,j} = (u(e_j) | e_i)}$$

- (b) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Je note $a'_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) de la matrice tA . Selon la question précédente, on a

$$a_{i,j} = (u(e_j) | e_i) = -(e_j | u(e_i)) = -(u(e_i) | e_j) = -a_{j,i} = -a'_{i,j}$$

Ainsi on a en déduit l'égalité : $\boxed{{}^tA = -A}$

2. On a

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

Or $\det(A) = \det(u) \neq 0$ car u est automorphisme de E

donc $(-1)^n = 1$ ainsi $\boxed{\text{l'entier } n \text{ est un nombre pair}}$

3. On a $u \in \text{GL}(E)$ (ensemble des automorphismes de E) or $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe. donc $v \in \text{GL}(E)$ ainsi v un automorphisme de E . *Non demandé par le sujet initial.*

La matrice de $v = u^2$ dans la base \mathcal{B} est A^2 et ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$

Ainsi la matrice de v dans la base orthonormale \mathcal{B} de E est symétrique donc l'endomorphisme est symétrique.

Ainsi $\boxed{v \text{ est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de } E}$

4. On considère x un vecteur propre de v associé à λ . On a $v(x) = \lambda x$.

D'une part, $(v(x) | x) = \lambda(x | x) = \lambda\|x\|^2$ et d'autre part $(v(x) | x) = (u^2(x) | x) = -(u(x) | u(x)) = -\|u(x)\|^2$ donc $\lambda\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$ or $x \neq 0_E$ donc $u(x) \neq 0_E$ car u est un automorphisme de E

d'où $\|x\|^2 > 0$ et $\|u(x)\|^2 > 0$ ainsi $\boxed{\lambda < 0}$

5. (a) On a $x \neq 0_E$ (vecteur propre) et $F = \text{Vect}(x, u(x))$ donc $1 \leq \dim(F) \leq 2$.

Par l'absurde, si on avait $\dim(F) = 1$, on aurait $(u(x), x)$ liée

ce qui nous fournit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$.

Ainsi $\lambda x = v(x) = u^2(x) = \mu^2 x$ et $x \neq 0_E$

donc $\lambda = \mu^2$ donc $\mu^2 < 0$ d'après la question précédente

ce qui est absurde car $\mu \in \mathbb{R}$. D'où $\boxed{\text{la dimension de } F \text{ est égale à } 2}$

- (b) On a $F = \text{Vect}(x, u(x))$ et u linéaire et $\lambda \neq 0$. Ainsi

$$u(F) = \text{Vect}(u(x), u^2(x)) = \text{Vect}(u(x), v(x)) = \text{Vect}(u(x), \lambda x) = \text{Vect}(u(x), x) = F$$

donc $\boxed{F \text{ est stable par l'automorphisme } u}$

Soit $x \in F^\perp$. Montrons $u(x) \in F^\perp$ c'est à dire : $\forall y \in F, x \perp y$.

Soit alors $y \in F$. On a $u(y) \in F$ d'après ce qui précède et donc $x \perp u(y)$ ainsi

$$(u(x) | y) = -(x | u(y)) = 0$$

On conclut que $u(x) \in F^\perp$. Ce qui permet d'en déduire que $\boxed{\text{l'orthogonal } F^\perp \text{ est aussi stable par } u}$

(c) D'après (a) et (b), $(x, u(x))$ est génératrice de F et $\dim(F) = 2$ ainsi il s'agit d'une base de F .

Comme $x \neq 0_E$, on peut noter les vecteurs de F : $e'_1 = \frac{1}{\|x\|}x$ et $e'_2 = \frac{1}{a\|x\|}u(x)$ comme dans l'indication.

On a alors $\|e'_1\| = 1$ et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a

$$\|e'_2\|^2 = (e'_2 | e'_2) = \frac{(u(x) | u(x))}{a^2\|x\|^2} = \frac{-(x | u^2(x))}{-\lambda\|x\|^2} = \frac{(x | \lambda x)}{\lambda\|x\|^2} = 1$$

et on a $(e'_1 | e'_2) = 0$ car

$$(e'_2 | e'_1) = \frac{(u(x) | x)}{a\|x\|^2} = \frac{-(x | u(x))}{a\|x\|^2} = -(e'_1 | e'_2) = -(e'_2 | e'_1)$$

ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une famille orthonormale de F donc base orthonormée car $\dim F = 2$ de plus comme u est linéaire et $a = \sqrt{-\lambda} \neq 0$, on a :

$$u(e'_1) = \frac{1}{\|x\|}u(x) = ae'_2 = 0e'_1 + ae'_2$$

et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a :

$$u(e'_2) = \frac{1}{a\|x\|}u^2(x) = \frac{\lambda}{a\|x\|}x = \frac{-a^2}{a\|x\|}x = -ae'_1 + 0e'_2$$

il existe une base orthonormée \mathcal{B}' de F telle que la matrice de u_F dans la base \mathcal{B}' soit $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

(d) u_{F^\perp} est un endomorphisme de F^\perp selon (b). Soit $x \in F^\perp$. On a

$$x \in \text{Ker}(u_{F^\perp}) \iff u_{F^\perp}(x) = 0_E \iff u(x) = 0_E \iff x = 0_E$$

car u est un automorphisme de E .

Ainsi $\text{Ker}(u_{F^\perp}) = \{0_E\}$ or F^\perp est de dimension finie $(n-2)$

donc u_{F^\perp} est un automorphisme de F^\perp et on a :

$$\forall (x, y) \in F^\perp \times F^\perp, (u_{F^\perp}(x) | y) = (u(x) | y) = -(x | u(y)) = -(x | u_{F^\perp}(y)) \quad (1)$$

Ainsi l'endomorphisme u_{F^\perp} est un automorphisme vérifiant la relation (1)

6. On reprend les notations et résultats de 5). On y a trouvé une base orthonormée \mathcal{B}' de F dans laquelle u_F a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que a est non nul car $a^2 = -\lambda > 0$.

Comme E est de dimension finie, on a $F \bigoplus^{\perp} F^\perp = E$ donc $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = 4 - 2 = 2$

u_{F^\perp} est un automorphisme de F^\perp vérifiant la relation (1). alors en faisant comme en 5) trouver e''_1 et $e''_2 \in F^\perp$ tels que : $\mathcal{B}_2 = (e''_1, e''_2)$ base orthonormée de G stable par u_{F^\perp} dans laquelle la matrice a la même forme que celle obtenue en 5(c) (ou ci-dessus).

On remarque que $G = F^\perp$ car G sous-espace de F^\perp de dimension égale à 2

En concaténant les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}_2 , on obtient \mathcal{B}'' une base adaptée à $F \bigoplus^{\perp} F^\perp = E$ d'où l'existence de

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ et \mathcal{B}''' base orthonormée de E tels que la matrice de u dans \mathcal{B}''' soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 3

Première partie

1. La fonction H est dérivable sur \mathbb{R} et $H' : t \mapsto 30t^2 + 62t + 71$
Le discriminant de cette fonction polynomiale de degré 2 est

$$\Delta = 62^2 - 4 \times 30 \times 71 = 4(31 \times 31 - 30 \times 31 - 30 \times 40) = 4(31 - 1200) < 0$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) > 0$ d'où H est strictement croissante sur \mathbb{R} .

En particulier, H est strictement croissante sur $[0, 1/2]$ de plus H y est continue et $H(0) = -a < 0$

et $H(1/2) > 0$ car $H(1/2) = 10/8 + 31/4 + 71/2 - a = \frac{5 + 31 + 2 \times 71 - 4a}{4} > \frac{142 - 120}{4} > 0$ car $a < 30$

Ainsi par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

il existe un unique réel noté $\ell \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ tel que : $H(\ell) = 0$
--

2. # On reconnaît ici la méthode de Newton vue en informatique !

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

H est dérivable sur \mathbb{R} , ce qui assure l'existence de la tangente T_0 au point d'abscisse x_0 à la courbe représentative de H .

Cette tangente a pour équation : $y = H'(x_0)(x - x_0) + H(x_0)$.

Comme $H'(x_0) \neq 0$ selon 1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = H'(x_0)(x - x_0) + H(x_0) \iff x = x_0 - \frac{H(x_0)}{H'(x_0)}$$

Ainsi la tangente T_0 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse : $x_0 - \frac{H(x_0)}{H'(x_0)}$

Ainsi comme $u_0 = \frac{1}{2}$ existe bien, par récurrence immédiate u_n existe bien pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}$

- (b) Par théorèmes généraux, f est dérivable sur $[0, 1]$. Soit $t \in [0, 1]$. On a :

$$f'(t) = 1 - \frac{(H'(t))^2 - H(t)H''(t)}{(H'(t))^2} = \frac{H(t)H''(t)}{(H'(t))^2} = \frac{H(t) \times (60t + 62)}{(H'(t))^2}$$

Or $(H'(t))^2 > 0$ et $60t + 62 > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $H(t)$.

De plus $f(0) = \frac{a}{71}$ et $f(1) = 1 - \frac{112 - a}{163} = \frac{51 + a}{163}$

On obtient donc le tableau de variations de la fonction f , à l'aide de 1) :

t	0	ℓ	1
H		0	
$f'(t)$	-	0	+
f	$\frac{a}{71}$	ℓ	$\frac{51 + a}{163}$

Ainsi comme $\ell \leq \frac{1}{2} < 1$ et que la fonction f est croissante sur $[\ell, 1]$, on a donc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(1) = \frac{51+a}{163} < \frac{80}{163} < \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

comme de plus $f(\ell) = \ell$ alors $[\ell, \frac{1}{2}]$ est stable par f .

Comme $u_0 \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$, par récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$

(c) On a $H'' : t \mapsto 60t + 62$ donc H'' est croissante sur \mathbb{R} .

En notant $M = H''(1/2) = 92$ et en remarquant que $0 \leq H''(0) \leq H''(\ell)$, on a

$$\forall t \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right], |H''(t)| \leq M$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$ et $\ell \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$. Comme H est de classe \mathcal{C}^2 sur $[\ell, \frac{1}{2}]$, l'inégalité de Taylor pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 donne :

$$|H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)| \leq \frac{M}{2!} |\ell - u_n|^2$$

or $\frac{M}{2!} = \frac{92}{2} = 46$. Ainsi on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, |H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)| \leq 46|u_n - \ell|^2$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de u_{n+1} et $H(\ell) = 0$, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)} - \ell \right| = \frac{|H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)|}{|H'(u_n)|}$$

or H' est croissante sur $[0, 1]$, ainsi $\forall t \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$, $0 < 71 \leq H'(0) \leq H'(t)$.

De la question précédente, on déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{46 |u_n - \ell|^2}{71}$$

Comme $46 \times 10 = 460 \leq 497 = 7 \times 71$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7 |u_n - \ell|^2}{10}$

(e) On a $|u_0 - \ell| \leq \frac{1}{2}$ car $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $u_0 = \frac{1}{2}$. D'après (d), $|u_1 - \ell| \leq \frac{7 |u_0 - \ell|^2}{10} = \frac{7}{40}$ puis

$$|u_2 - \ell| \leq \frac{7 |u_1 - \ell|^2}{10} \leq \frac{7^2 \times 7}{40^2 \times 10} \leq \frac{50 \times 7}{16 \cdot 10^3} = \frac{35}{16 \cdot 10^2} \leq \frac{36}{12 \cdot 10^2} = 3 \times 10^{-2}$$

Ainsi $\forall a \in]0, 29[$, on a vérifié que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 0.03 près

3. # méthode 1 # itérative en définissant f dans la fonction suite

```
def suite(a,n):
    def f(t):
        return t - (10*t**3+31*t**2+71*t-a)/(30*t**2+62*t+71)
    u=1/2
    res=[u]
    for i in range(n):
        u=f(u)
        res.append(u)
    return res
```

méthode 2 # récursive en définissant f hors de la fonction suite

```
def fr(t,a): # on doit mettre a comme argument
    return t - (10*t**3+31*t**2+71*t-a)/(30*t**2+62*t+71)

def suiter(a,n):
    if n==0: return [1/2]
    else :
        res=suiter(a,n-1)
        u=res[-1]
        res.append(fr(u,a))
    return res
```

Deuxième partie

1. On a l'union disjointe (finie) : $\Omega = \bigcup_{i=0}^4 (X = i)$

$$\text{donc } 1 = \sum_{i=0}^4 \mathbb{P}(X = i) = \frac{a + b + 40 + 21 + 10}{100} \text{ donc } \boxed{a + b = 29}$$

2. Soit $t \in [0, 1]$. On a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)t + \mathbb{P}(X = 2)t^2 + \mathbb{P}(X = 3)t^3 + \mathbb{P}(X = 4)t^4 + 0$$

$$\text{donc } \boxed{G_X(t) = \frac{a}{100} + \frac{29-a}{100}t + \frac{2}{5}t^2 + \frac{21}{100}t^3 + \frac{1}{10}t^4}$$

3. (a) On a $\boxed{w_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_{Z_n}(0)}$

(b) On a $\boxed{w_{n+1} = G_{Z_{n+1}}(0) = G_X \circ G_{Z_n}(0) = G_X(w_n)}$ d'après la question précédente.

(c) La fonction G_X est polynomiale de dérivée $G'_X : t \mapsto \frac{29-a}{100} + \frac{4}{5}t + \frac{63}{100}t^2 + \frac{2}{5}t^3$

Par somme, $\forall t \geq 0$, $G'_X(t) \geq 0$ ainsi la fonction G_X est croissante sur \mathbb{R}^+ donc sur $[0, \frac{1}{2}]$. Ainsi :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], G_X(0) \leq G_X(t) \leq G_X(1/2)$$

Or $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0) \geq 0$ et

$$G_X(1/2) = \frac{a}{100} + \frac{29-a}{200} + \frac{2}{20} + \frac{21}{800} + \frac{1}{160} = \frac{8a + 116 - 4a + 80 + 21 + 5}{800} = \frac{4a + 222}{800} = \frac{2a + 111}{400}$$

Or d'après 1), $a = 29 - b \leq 29$ donc $G_X(1/2) \leq \frac{2 \cdot 29 + 111}{400} \leq \frac{169}{400} \leq \frac{200}{400} \leq \frac{1}{2}$ Ainsi

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], 0 \leq G_X(t) \leq \frac{1}{2}$$

d'où $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par G_X c'est à dire $G_X \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

On a alors l'initialisation $w_0 = \mathbb{P}(Z_0=0) = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ car Z_0 est constante égale à 1

et on a l'hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \implies w_{n+1} = G_X(w_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

On conclut, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

On a donc $w_0 = 0 \leq w_1 \leq \frac{1}{2}$ et G_X est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ Ainsi par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq w_{n+1}$$

donc la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par $1/2$ donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n \geq 0} \text{ converge}}$

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2}$, alors $\boxed{L(a) \in [0, \frac{1}{2}]}$ par prolongement des inégalités.

(d) On a $w_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L(a)$ (suite extraite) et $G_X(w_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} G_X(L(a))$ car G_X est continue
or $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_X(w_n) = w_{n+1}$. Par unicité de la limite, $G_X(L(a)) = L(a)$

$$\text{Ainsi } \frac{a}{100} + \frac{29-a-100}{100}L(a) + \frac{2}{5}L(a)^2 + \frac{21}{100}L(a)^3 + \frac{1}{10}L(a)^4 = 0$$

$$\text{donc } 0 = a - 71L(a) - aL(a) + 40L(a)^2 + 21L(a)^3 + 10L(a)^4$$

$$\text{ainsi } 0 = -(-a + 71L(a) + 31L(a)^2 + 10L(a)^3) + L(a)(-a + 71L(a) + 31L(a)^2 + 10L(a)^3)$$

d'où $(L(a) - 1)H(L(a)) = 0$ or $L(a) \neq 1$ car $L(a) \in [0, \frac{1}{2}]$

donc $H(L(a)) = 0$ donc $L(a) \in]0, \frac{1}{2}[$ car $H(0) \neq 0$ et $H(1/2) \neq 0$ selon 1) de la première partie

et on a aussi $\boxed{L(a) = \ell}$

D'après 3) de la première partie,

$\boxed{u_2 \text{ est une approximation de } L(a) \text{ à } 0.03 \text{ près. de la probabilité d'extinction de la population}}$

EXERCICE n° 4

1. #Version Listes dans l'esprit du programme

```
def deplacement(L,a,b): #1.(a)
    if L == "N": return [a,b+1]
    elif L == "E": return [a+1,b]
    else: return None
# le traitement des deux premiers cas est suffisant.
def chemin(m): #1.(b)
    l = len(m)
    abscisses = [0]
    ordonnees = [0]
    a = 0
    b = 0
    for i in range(l):
        NouveauPoint = deplacement(m[i],a,b)
        a = NouveauPoint[0]
        b = NouveauPoint[1]
# on peut aussi [a,b]=deplacement(m[l],a,b) ; ce qui permet une ligne au lieu de trois
    abscisses.append(a)
    ordonnees.append(b)
    return [abscisses, ordonnees]
```

#Version Couples pas tout à fait l'esprit du programme

```
def deplacementc(L,a,b): #1.(a)
    if L == "N": return (a,b+1)
    else : return (a+1,b)
def cheminc(m): #1.(b)
    l = len(m)
    abscisses = [0]
    ordonnees = [0]
    a = 0
    b = 0
    for i in range(l):
        (a,b) = deplacementc(m[i],a,b)
        abscisses.append(a)
        ordonnees.append(b)
    return (abscisses, ordonnees)
```

2. (a) Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de trajets comportant exactement l étapes est 2^l .

(b) À chaque trajet reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$, on peut associer de façon unique un quintuplet de $\{"E", "N"\}^5$ constitué exactement de deux "N" et de trois "E"; cette association est une application bijective entre ces trajets et ces quintuplets.

Pour compter les quintuplets de $\{"E", "N"\}^5$ constitués exactement de deux "N" et de trois "E", il suffit de dénombrer les éventualités des positions des deux "N" parmi les cinq possibles.

On trouve $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (ou avec le triangle de Pascal).

Il y a dix trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$

Remarque : en s'intéressant aux positions des "E", on retrouve $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ car $5 - 3 = 2$.

- (c) De même, pour
- $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

le nombre de chemins reliant l'origine à un point M de coordonnées (a, b) est $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$

3. (a)
- U_1
- est en bijection avec l'ensemble des couples :
- $\{("E", "N"), ("N", "E")\}$
- .

Cet ensemble est de cardinal 2. Il y a en tout $2^2 = 4$ mots de longueur 2.En calculant le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles, on trouve $\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{2}$

La réponse précédente est tout à fait satisfaisante ! (Énoncé très guidé, sans modélisation proposée avec espace probabilisé). Cependant si on tient à formaliser cela de façon extrêmement (trop ?) rigoureuse : on peut considérer un univers fini constitué des l-uplets : $\Omega = \{("E", "N")^l\}$ où $l \in \mathbb{N}^$ est donné par l'énoncé. On considère ensuite l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ muni de l'équiprobabilité.*

Ainsi $U_1 = \{("E", "N"), ("N", "E")\} \times \{("N", "E")\}^{l-2}$ et donc $\mathbb{P}(U_1) = \frac{|U_1|}{|\Omega|} = \frac{2 \times 2^{l-2}}{2^l} = \frac{1}{2}$

- (b)
- Premier cas : Si $a > c$ ou $b > d$,**
- on ne trouve aucun chemin reliant le point de coordonnées
- (a, b)
- au point de coordonnées
- (c, d)
- car on ne se déplace qu'à abscisse croissante et ordonnée croissante.

Deuxième cas : Si $(a, b) = (c, d)$, on trouve uniquement le chemin correspondant à la suite ayant pour unique terme (a, b) .**Troisième cas : Si $(a, b) \neq (c, d)$ et $a \leq c$ et $b \leq d$,** en faisant comme en 2(c), on trouve $\binom{c-a+d-b}{c-a} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$ trajets reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) .En effet, un trajet du point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) peut être mis en relation bijective avec une tuple de $\{("E", "N")\}^{c-a+d-b}$ comportant $(c-a)$ "E" (ou $(d-b)$ "N").

Remarque : le nombre de ces trajets est également le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(c-a, d-b)$.

En conclusion,

si $a \leq c$ et $b \leq d$, on a $C_{(a,b)}^{(c,d)} = \binom{c-a+d-b}{c-a} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$ et $C_{(a,b)}^{(c,d)} = 0$ sinonComme $0 \leq n-1$ et $1 \leq n$, on a $C_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}$

- (c) Vu le résultat admis par l'énoncé, on cherche le nombre de chemins reliant le point de coordonnées
- $(1, 0)$
- au point de coordonnées
- $(n-1, n)$
- .

Comme $1 \leq n-1$ et $0 \leq n$, d'après la question précédente, ce nombre vaut : $C_{(1,0)}^{(n-1,n)} = \frac{(n-1-1+n-0)!}{(n-1-1)!(n-0)!}$ Il y a $C_{(1,0)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{(n-2)! \times n!}$ chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$

- (d) Le cardinal d'une réunion disjointe finie étant la somme des cardinaux et à l'aide des deux questions précédentes, on a :

$$C_{(1,0)}^{(n-1,n)} + T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$$

$$\text{donc } T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = C_{(0,1)}^{(n-1,n)} - C_{(1,0)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)! \times n!} = \frac{(2n-2)! \times (n-n+1)}{(n-1)! \times n!}$$

On en déduit que $T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \times n!}$

- (e) Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a :
$$\boxed{T_{(1,0)}^{(n,n-1)} = T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \times n!}$$
- (f) Le premier déplacement se fait vers le Nord ou bien vers l'Est. Par un calcul analogue à 2(a), il y a $\frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}$ chemins pour chacun des deux cas. Ainsi :

$$(N_1, E_1) \text{ forme un système complet d'événements vérifiant } \mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Selon la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(U_n \cap N_1) + \mathbb{P}(U_n \cap E_1)$$

L'événement $U_n \cap N_1$ est l'événement : "À l'étape 1, on se dirige vers le Nord pour aller au point de coordonnées $(0, 1)$ puis on rejoint le point de coordonnées $(n-1, n)$ sans couper la droite d'équation $y = x$ et à l'étape $2n$, on se dirige vers l'Est pour rejoindre le point de coordonnées (n, n) ."

Pour cet événement les étapes de numéros 1 et $2n$ étant fixés, on obtient : $\left| U_n \cap N_1 \right| = T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$

Il y a en tout 2^{2n} chemins comportant $2n$ étapes (cf 2(a)). D'où, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(U_n \cap N_1) = \frac{T_{(0,1)}^{(n-1,n)}}{2^{2n}} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \times n! \times 2^{2n}}$$

De manière analogue : $\mathbb{P}(U_n \cap E_n) = \mathbb{P}(U_n \cap N_n)$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\mathbb{P}(U_n) = 2\mathbb{P}(U_n \cap N_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n! \times (n-1)!}}$$

Vu que le résultat est donné, on va montrer par récurrence sur $n \geq 2$, la propriété \mathcal{H}_n :

$$\frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$$

Initialisation : \mathcal{H}_2 est vraie car pour $n = 2$, on a

$$\frac{1}{2^{2 \cdot 2 - 1}} \times \frac{(2 \cdot 2 - 2)!}{2!(2-1)!} = \frac{1}{2^3} \times \frac{2!}{2! \times 1!} = \frac{1}{8} \text{ et } \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2 \cdot 2 - 3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que \mathcal{H}_n est vraie. Montrons \mathcal{H}_{n+1} . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} &= \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2n(2n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \cdot \frac{2n-1}{2n+2} \\ \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3) \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n \times (2n+2)} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : Ainsi on a montré, par récurrence que \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \geq 2$.

$$\text{Ainsi on a bien } \boxed{\mathbb{P}(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}}$$

Remarque : On s'est intéressé uniquement aux chemins de longueur n dans cette question. Dans le cas où on tient compte de tous les chemins de longueurs $l \geq 2n$, il faudrait multiplier tous les cardinaux par 2^{l-2n} . Les probabilités étant des quotients de cardinaux, les résultats seront identiques.

4. (a) Quand $n \rightarrow +\infty$, d'après les calculs précédents, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}$

or $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On peut conclure : $\boxed{\text{avec } a = \frac{-3}{2}, \text{ on a : } \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n \rightarrow +\infty} = \frac{-3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

(b) **Méthode 1 :** Je pose pour $N \geq 2$: $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N)$ et $y_N = x_{N+1} - x_N$.

Ainsi on a $y_N = \frac{1}{N} - \ln(N+1) + \ln(N) = \frac{1}{N} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$

Quand $N \rightarrow +\infty$, on a : $1/N \rightarrow 0$ donc

$$y_N = \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

or la série de Riemann $\sum_{N \geq 2} \frac{1}{N^2}$ converge

ainsi par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_{N \geq 2} y_N$ converge absolument donc converge.

Ainsi la série $\sum_{N \geq 2} (x_{N+1} - x_N)$ converge d'où la suite $(x_N)_N$ converge selon le lien suite-série.

Je note $\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N$ et on a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)}$

Méthode 2 : La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue décroissante et positive sur $[1, +\infty[$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 2} \left(\int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}\right)$ converge par théorème de comparaison de série-intégrale.

Je note λ la somme de cette série. Ainsi quand $N \rightarrow +\infty$: $\sum_{n=2}^N \left(\int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}\right) = \lambda + o(1)$

donc selon Chasles, on a $\int_1^N \frac{dt}{t} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} + \lambda + o(1)$

donc $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N} + \ln(N) - \lambda + o(1) = \ln(N) + 1 - \lambda + o(1)$.

On pose $\gamma = 1 - \lambda$ et on a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)}$

Remarque : l'énoncé semble attendre quelque chose proche de la méthode 2 mais la méthode 1 serait acceptée.

(c) D'après (a), on peut écrire pour $n \geq 2$, $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{-3}{2n} + w_n$ où $w_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge absolument donc converge par comparaison de séries à termes positifs ce qui nous fournit $L \in \mathbb{R}$ tel que :

quand $N \rightarrow +\infty$, on ait $\sum_{n=1}^{N-1} w_n = L + o(1)$. D'où, d'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{-3}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + L + o(1) = \frac{-3 \ln(N)}{2} + \frac{-3}{2} \gamma + L + o(1)$$

Par ailleurs, on a le télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)) = \ln(v_N) - \ln(v_1)$$

Ainsi $\ln(v_N) = \ln\left(\frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}\right) + o(1)$ avec $k = \exp\left(\ln(v_1) + \frac{-3}{2} \gamma + L\right) > 0$

d'où $v_n = \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}} \times \exp(o(1))$ or par continuité de \exp en 0, on a $\exp(o(1)) \rightarrow 1$

Ainsi il existe une constante $k > 0$ telle que : $v_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$

(d) Soit $n \geq 2$.

D'après 4(a), on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2}$

donc $(2n+2)v_{n+1} = (2n-1)v_n$ ainsi on a établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \implies v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(U_n)$ converge.

Soit $N \geq 2$, on a alors par changement d'indices :

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(U_n) = v_1 + v_2 + \sum_{k=2}^{N-1} v_{k+1} = v_1 + v_2 + \sum_{k=2}^{N-1} ((2k-1)v_k - (2k+1)v_{k+1}) = v_1 + (1+3)v_2 - (2N-1)v_N$$

On a utilisé un télescopage. De plus, d'après la question précédente : $(2N-1)v_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2k}{N^{\frac{1}{2}}}$ et $\frac{2k}{N^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(U_1) + 4\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$ par passage à la limite.

Par réunion disjointe dénombrable d'événements, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = 1$

On en déduit que : le chemin rencontre presque sûrement la droite d'équation $y = x$