

**Exercice 1**

1. a)  $G$  est l'isobarycentre de  $(A, B, C)$ , d'où ses coordonnées :

$$\alpha = \frac{1}{3}(a+b+c) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

- b) En écrivant des équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle  $ABC$ , j'obtiens, tous calculs faits :

$$\lambda = -\frac{k^2}{abc} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{abc}{k}; \text{ ainsi } H \text{ appartient à } (\gamma).$$

2. On suppose, dans cette question, que  $ABC$  est un triangle équilatéral.

- a) Dans un triangle équilatéral, les médianes sont confondues avec les hauteurs, donc :

$$G = H.$$

- b) Je pose  $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$  et je calcule les fonctions symétriques élémentaires : d'après 1.a),  $\sigma_1 = 3\alpha$ , or  $\alpha = \lambda$ , puisqu'ici  $G = H$ , d'où  $\sigma_1 = 3\lambda$ ;  $\sigma_3 = -\frac{k^2}{\lambda}$  d'après 1.b). Enfin :

$$\beta = \frac{k}{3} \cdot \frac{\sigma_2}{abc} \text{ (d'après 1.a)) et } \beta = \mu = -\frac{abc}{k} = \frac{k}{\lambda} \text{ d'où } \sigma_2 = -3\frac{k^2}{\lambda^2}.$$

En conclusion,

$$(a, b, c) \text{ est un système de racines de } P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{k^2}{\lambda^2}X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

- c) On suppose que  $H\left(\lambda, \frac{k}{\lambda}\right)$  n'est pas un sommet de  $(\gamma)$ , c'est-à-dire que  $\lambda^2 \neq k$ . Le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$  admet pour équation :

$$(x-\lambda)^2 + \left(y - \frac{k}{\lambda}\right)^2 = R^2 \quad \text{où} \quad R = HA = HB = HC.$$

Pour conserver la symétrie des rôles de  $a, b, c$ , j'écris :

$$R^2 = \frac{1}{3}(HA^2 + HB^2 + HC^2)$$

ce qui conduit, tous calculs faits et en tenant compte des relations :

$$\beta = \mu = \frac{k}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

à l'équation :

$$\mathcal{C} / (x-\lambda)^2 + \left(y - \frac{k}{\lambda}\right)^2 = 4\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)$$

ou encore :

$$\mathcal{C} / x^2 - 2x\lambda + y^2 - 2y\frac{k}{\lambda} = 3\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right).$$

Par conséquent, les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $(\gamma)$  sont les  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  tels que :

$$x^4 - 2\lambda x^3 - 3\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)x^2 - 2\frac{k^2}{\lambda}x + k^2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$(x+\lambda)\left(x^3 - 3\lambda x^2 - \frac{3}{\lambda^2}k^2 x + \frac{k^2}{\lambda}\right) = 0.$$

On retrouve donc bien les racines  $a, b, c$  et une “quatrième” solution :  $-\lambda$ . C’est bien un réel non nul, reste à se convaincre qu’il est distinct de  $a, b$  et  $c$ . Or :

$$P(-\lambda) = -4\lambda^3 + 4\frac{k^2}{\lambda} = \frac{4}{\lambda}(k^2 - \lambda^4) \neq 0 \quad \text{car } \lambda^2 \neq k \text{ et } k > 0.$$

En conclusion :

$$\mathcal{C} \cap (\gamma) = \{A, B, C, D\} \quad \text{avec} \quad D \left( -\lambda, -\frac{k}{\lambda} \right).$$

Notons que  $D$  est le symétrique de  $H$  par rapport à  $O$ . Notons également que, lorsque  $H$  est un sommet de  $(\gamma)$ ,  $D$  n’est autre que l’autre sommet et se trouve confondu avec l’un des trois points  $A, B, C$  (puisque  $P(-\lambda) = 0$ !);  $\mathcal{C}$  est alors tangent à  $(\gamma)$  en  $D$ .

a)  $Q(0)Q(r) = \frac{k^2}{r} \left( -2r^3 - 2\frac{k^2}{r} \right) = -2k^2 \left( r^2 + \frac{k^2}{r^2} \right)$ . Ainsi, quel que soit le signe de  $r$  :

$$Q(0)Q(r) < 0.$$

- si  $r \geq 0$  : alors  $\lim_{-\infty} Q = -\infty$ ,  $Q(0) > 0$ ,  $Q(r) < 0$ ,  $\lim_{+\infty} Q = +\infty$  ; dans ce cas,  $Q$  s’annule au moins une fois (en vertu du théorème des valeurs intermédiaires), sur chacun des trois intervalles disjoints  $]-\infty, 0[, ]0, r[, ]r, +\infty[$  ;
- si  $r < 0$  : alors  $\lim_{-\infty} Q = -\infty$ ,  $Q(r) > 0$ ,  $Q(0) < 0$ ,  $\lim_{+\infty} Q = +\infty$  ; dans ce cas,  $Q$  s’annule au moins une fois sur chacun des trois intervalles disjoints  $]-\infty, r[, ]r, 0[, ]0, +\infty[$ .

Ainsi, dans tous les cas :

$$Q \text{ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles, notées } r_1, r_2, r_3.$$

b) D’après les relations entre coefficients et racines d’un polynôme scindé, j’ai

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{k^2}{r} ; r_1 + r_2 + r_3 = 3r ; \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{3}{r}.$$

La première relation montre, d’après 1.b), que l’orthocentre du triangle  $R_1 R_2 R_3$  est le point  $H$  de coordonnées  $\left( r, \frac{k}{r} \right)$  et les deux dernières, d’après 1.a), que son centre de gravité  $G$  n’est autre que le même point  $H$ . Il en résulte que les médianes du triangle  $R_1 R_2 R_3$  sont confondues avec ses hauteurs et donc avec les médiatrices des côtés :

$$\text{Le triangle } R_1 R_2 R_3 \text{ est équilatéral.}$$

3. Analyse : d’après 2., si un triangle équilatéral a ses sommets  $A, B, C$  sur  $(\gamma)$ , nécessairement il existe un point  $D$  de  $(\gamma)$  tel que le cercle passant par  $D$  et centré au symétrique de  $D$  par rapport à  $O$  recoupe  $(\gamma)$  en  $A, B, C$  (et en  $D$ , éventuellement confondu avec  $A, B$  ou  $C$  si l’un de ces points est un sommet de  $(\gamma)$ ).

Synthèse : réciproquement, si je choisis un point  $D \left( -r, -\frac{k}{r} \right)$  de  $(\gamma)$  ( $r \in \mathbb{R}^*$ ), je note  $H \left( r, \frac{k}{r} \right)$  son symétrique par rapport à  $O$ ,  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $H$  passant par  $D$  a pour équation :

$$(x - r)^2 + \left( y - \frac{k}{r} \right)^2 = 4r^2 + 4\frac{k^2}{r^2}$$

et (cf. calculs du 2.c)) les abscisses des points d’intersection de  $\mathcal{C}$  et  $(\gamma)$  sont les  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  tels que :

$$(x + r)Q(x) = 0.$$

D’après 3.,  $\mathcal{C}$  recoupe bien  $(\gamma)$  en trois points formant un triangle équilatéral (distincts de  $D$ , sauf dans le cas où  $D$  et  $H$  sont les sommets de  $(\gamma)$ , c’est le cas  $r = \pm\sqrt{k}$ ).

En conclusion, on obtient tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à  $(\gamma)$  en choisissant un point  $D$  de  $(\gamma)$ , en construisant son symétrique  $H$  par rapport à  $O$  puis le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $H$  passant par  $D$  : si  $D$  est l’un des sommets de  $(\gamma)$ ,  $\mathcal{C}$  est tangent à  $(\gamma)$  en  $D$  et recoupe  $(\gamma)$  en deux autres points formant un triangle équilatéral avec  $D$  ; si  $D$  n’est pas un sommet de  $(\gamma)$ ,  $\mathcal{C}$  recoupe  $(\gamma)$  en quatre points distincts,  $D$  et les trois sommets d’un triangle équilatéral.

## Exercice 2

1. Soit  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ; l'application  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi, par comparaison avec une intégrale de Riemann,

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R}^{+*}, t \mapsto f(x, t) \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

2. a) Soit  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ ; j'applique le théorème de dérivation sous le signe  $\int$  sur  $[a, +\infty[$  à la fonction  $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} f(x, t) dt$  :  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[ \times \mathbb{R}^+$ , admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  continue sur  $[a, +\infty[ \times \mathbb{R}^+$  et je vérifie les hypothèses de domination :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}^+ \quad |f(x, t)| \leq e^{-t^2 \sqrt{a}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{2\sqrt{a}} e^{-t^2 \sqrt{a}}.$$

Comme les deux fonctions – indépendantes de  $x - t \mapsto e^{-t^2 \sqrt{a}}$  et  $t \mapsto \frac{t^2}{2\sqrt{a}} e^{-t^2 \sqrt{a}}$  sont continues et intégrables sur  $\mathbb{R}^+$  (même méthode qu'au 1.), je peux conclure :  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$  et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz. Cela étant établi pour tout  $a > 0$ , j'en déduis :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ et } F' : x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2 \sqrt{x}} \cos \frac{t^3}{3} dt.}$$

- b) Je fixe  $x > 0$  et j'intègre par parties sur  $[0, T]$ , pour  $T > 0$  :

$$\int_0^T \left( e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( t^2 \cos \frac{t^3}{3} \right) dt = \left[ \left( e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( \sin \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^T - \int_0^T \left( -2t\sqrt{x} e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( \sin \frac{t^3}{3} \right) dt.$$

Faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$  (l'intégrabilité de la dernière fonction se justifie comme précédemment), j'obtiens

$$\int_0^{+\infty} \left( e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( t^2 \cos \frac{t^3}{3} \right) dt = 2\sqrt{x} \int_0^{+\infty} \left( t e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( \sin \frac{t^3}{3} \right) dt.$$

Autrement dit, d'après a) :

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[ \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2 \sqrt{x}} \sin \left( \frac{t^3}{3} \right) dt.}$$

En procédant avec cette expression de  $F'(x)$  comme avec celle de  $F(x)$  au a), j'en déduis que

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ et } F'' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2 \sqrt{x}} \sin \frac{t^3}{3} dt.}$$

3. Une nouvelle intégration par parties sur  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , suivie d'un passage à la limite pour  $T \rightarrow +\infty$  me fournit, pour  $x$  fixé dans  $]0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} F''(x) &= \int_0^{+\infty} \left( t e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( t^2 \sin \frac{t^3}{3} \right) dt \\ &= \left[ \left( t e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \left( -\cos \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left( e^{-t^2 \sqrt{x}} - 2t^2 \sqrt{x} e^{-t^2 \sqrt{x}} \right) \cos \frac{t^3}{3} dt \\ &= F(x) + 4x F'(x) \end{aligned}$$

(le crochet étant nul). Autrement dit :

$$\boxed{F \text{ est solution sur } ]0, +\infty[ \text{ de l'équation différentielle : } y''(x) - 2\sqrt{x} y'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} y(x) = 0.}$$

4. Soit  $x > 0$ . Pour les raisons habituelles,  $t \mapsto e^{-t^2 \sqrt{x}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et j'obtiens, en effectuant le changement de variable  $u = t.x^{1/4}$  sur le segment  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , puis en faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 \sqrt{x}} dt = \frac{1}{x^{1/4}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Or cette intégrale majore  $|F(x)|$  (majorer  $\cos$  par 1...), d'où

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.}$$

5. a) Soit  $u$  réel :

$$|\cos u - 1| = \left| \int_0^u \sin t dt \right| \leq \left| \int_0^u dt \right| = \frac{u^2}{2}$$

Par conséquent :

$$\boxed{K = 1/2 \text{ convient.}}$$

- b) L'existence de  $J$  se définit encore par la même méthode... Grâce au a), j'ai

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left| \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1 \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} K \frac{t^6}{9} dt = \frac{J}{18.x^{7/4}}$$

(même changement de variable qu'au a)). Or, d'après le calcul du a), pour  $x > 0$  :

$$\left| F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \right| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left( \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1 \right) dt \right|$$

De ces deux résultats, il découle que :

$$F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{1/4}}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{F(x) \text{ est équivalent à } \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

### Exercice 3

Première partie.

1. a) Par hypothèse,  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , d'où l'existence de  $Y$ , vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  :  $Y$  est un élément non nul de  $\mathbf{F}$  tel que :  $AY = \lambda Y$ . Par ailleurs,  $B$  et  ${}^tB$  ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.  $\lambda$  est donc également valeur propre de  ${}^tB$ , d'où l'existence de  $Z$  non nul dans  $\mathbf{F}$  tel que :  ${}^tBZ = \lambda Z$ .

$$\boxed{\text{Il existe } Y \text{ et } Z \text{ non nuls dans } \mathbf{F} \text{ tels que : } AY = \lambda Y \text{ et } {}^tBZ = \lambda Z.}$$

- b) Supposons  $Y, Z$  fixés comme ci-dessus. Si je note  $y_i$  les composantes de  $Y$  et  $z_j$  celles de  $Z$ , le produit  $Y^t Z$  est la matrice carrée  $(y_i z_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  : c'est un élément de  $\mathbf{E}$ , non nul car  $Y$  et  $Z$  sont non nuls (en choisissant  $i, j$  tels que  $y_i \neq 0$  et  $z_j \neq 0$ , j'obtiens un élément non nul de  $Y^t Z$ ).

$$\boxed{Y^t Z \text{ est un élément non nul de } \mathbf{E}.}$$

Calculons donc son image par  $f$  :

$$f(Y^t Z) = AY^t Z - Y^t ZB = \lambda Y^t Z - Y^t ({}^tBZ) = \lambda Y^t Z - Y^t (\lambda Z) = O$$

$$\boxed{f(Y^t Z) = O.}$$

- a) Par hypothèse,  $AM_0 = M_0B$ . Comme  $A^0 M_0 = M_0 B^0$ , une récurrence facile permet d'obtenir :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \quad A^k M_0 = M_0 B^k.}$$

Puis, par combinaison linéaire des relations précédentes :

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{C}[X] \quad P(A) M_0 = M_0 P(B).}$$

- b) En vertu du théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{P_A(A) = O.}$$

En choisissant  $P = P_A$  dans la relation du a), j'obtiens donc  $M_0 P_A(B) = O$ , alors que  $M_0 \neq O$ , donc :

$$\boxed{P_A(B) \text{ n'est pas inversible dans } \mathbf{E}.}$$

Or  $P_A$  est de la forme  $\prod_{k=1}^n (\lambda_k - X)$  où les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $A$ , éventuellement répétées selon leur multiplicité. J'ai alors

$$\det P_A(B) = \prod_{k=1}^n \det(\lambda_k I - B)$$

et l'un au moins des facteurs est nul, puisque  $P_A(B)$  n'est pas inversible : c'est dire que l'un des  $\lambda_k$  est valeur propre de  $B$  :

$A$  et  $B$  ont au moins une valeur propre commune.

2. Au 1., nous avons vu que, si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune, alors  $\text{Ker } f$  contient au moins un vecteur non nul, donc  $f$  est non injective, *a fortiori* non bijective. Réciproquement, si  $f$  n'est pas bijective, elle n'est pas injective (c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) et donc, d'après 2.,  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune. Autrement dit :

$f$  est une bijection de  $\mathbf{E}$  sur  $\mathbf{E}$  si et seulement si  $A$  et  $B$  n'ont aucune valeur propre en commun.

3. Soit  $\mu \in \mathbf{C}$  ;  $\mu$  est valeur propre de  $f$  si et seulement si  $f - \mu \text{id}$  est non injective, or  $f - \mu \text{id}$  est l'endomorphisme de  $\mathbf{E}$  qui à  $M$  associe

$$(f - \mu \text{id})(M) = AM - MB - \mu M = (A - \mu I)M - MB.$$

Le résultat précédent s'applique :  $f - \mu \text{id}$  est non injective si et seulement si  $A - \mu I$  et  $B$  ont une valeur propre commune. Or

$$\text{Sp}(A - \mu I) = \{\alpha - \mu, \alpha \in \text{Sp } A\}.$$

Finalement,  $\mu$  est valeur propre de  $f$  si et seulement s'il existe  $\alpha \in \text{Sp } A$  et  $\beta \in \text{Sp } B$  tels que  $\alpha - \mu = \beta$ . Autrement dit :

$\mu$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si :  $\exists (\alpha, \beta) \in \text{Sp } A \times \text{Sp } B \quad \mu = \alpha - \beta$ .

### Deuxième partie.

1. Pour  $M = (a_{i,j})$  et  $N = (b_{i,j})$ , j'ai (calcul classique) :

$$\text{tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

Par conséquent, l'application  $(M, N) \mapsto \langle M|N \rangle = \text{tr}({}^tMN)$  est clairement bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbf{E}$ . On a bien défini un produit scalaire sur  $\mathbf{E}$  (c'est le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{E}$ ).

2. Par définition,  $f^*$  est l'unique endomorphisme de  $\mathbf{E}$  vérifiant :

$$\forall (M, N) \in \mathbf{E}^2 \quad \langle f^*(M)|N \rangle = \langle M|f(N) \rangle.$$

Or, grâce aux propriétés de la trace :

$$\begin{aligned} \forall (M, N) \in \mathbf{E}^2 \quad \langle M|f(N) \rangle &= \text{tr}({}^tMAN) - \text{tr}({}^tMBN) \\ &= \text{tr}({}^t({}^tAM)N) - \text{tr}({}^t(M{}^tB)N) \\ &= \langle {}^tAM - M{}^tB|N \rangle \end{aligned}$$

Donc, par unicité, l'endomorphisme  $M \mapsto {}^tAM - M{}^tB$  n'est autre que  $f^*$  :

$\forall M \in \mathbf{E}, f^*(M) = {}^tAM - M{}^tB.$

3. a) Résultat classique... On peut l'établir en explicitant les produits matriciels  $DM$  et  $MD$ , avec  $D = (d_{i,j})$  et en choisissant pour  $M$  les matrices de la base canonique de  $\mathbf{E}$ . On peut aussi se ramener à un autre exercice classique : soient  $D$  dans  $\mathbf{E}$  commutant avec tous les  $M$  de  $\mathbf{E}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $D$  :  $u$  commute avec tous les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ . Soient alors un vecteur non nul  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $s_x$  une symétrie de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à  $\text{Vect}(x)$  : par hypothèse,  $u$  commute avec  $s_x$ , donc les sous-espaces propres de  $s_x$  sont stables par  $u$ , en particulier la droite  $\text{Vect}(x)$ . Il existe par conséquent un unique  $a_x$  dans  $\mathbf{R}$  tel que  $u(x) = a_x \cdot x$ , cela pour tout vecteur non nul  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  ; on montre enfin (classiquement, en distinguant famille liée, famille libre) que  $a_x$  ne dépend pas de  $x$ . En conclusion, comme  $u(0) = 0$ , il existe  $a$  dans  $\mathbf{R}$  tel que  $u = a \text{id}$ . Autrement dit :

Il existe  $a$  dans  $\mathbf{R}$  tel que :  $D = aI$ .

- b) Si  $A = B = aI$ , il est clair que  $f = 0$  ! Pour établir la réciproque, je suppose que  $f = 0$ , c'est-à-dire que

$$\forall M \in \mathbf{E} \quad AM = MB.$$

Nécessairement,  $A = B$  (choisir  $M = I$  !). Le a) fournit alors  $a$  réel tel que  $A = B = aI$  :

$$\boxed{f = 0 \text{ si et seulement s'il existe } a \text{ dans } \mathbf{R} \text{ tel que } A = B = aI.}$$

- c) D'après 2., si les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques, alors  $f = f^*$ . Pour établir la réciproque, je suppose que  $f = f^*$ , autrement dit que  $f - f^* : M \mapsto (A - {}^tA)M - M(B - {}^tB)$  est l'application nulle ; la question précédente montre alors l'existence de  $a$  dans  $\mathbf{R}$  tel que

$$A - {}^tA = B - {}^tB = aI$$

et  $a$  est nécessairement nul puisque  $aI$  doit être antisymétrique. Finalement  $A$  et  $B$  sont symétriques.

$$\boxed{f \text{ est autoadjoint si et seulement si les matrices } A \text{ et } B \text{ sont symétriques.}}$$

- d) On suppose que  $B$  est une matrice orthogonale et antisymétrique :  ${}^tB = B^{-1}$  et  ${}^tB = -B$ , d'où

$$B^2 = -I, \text{ donc } (\det B)^2 = (-1)^n,$$

$(-1)^n$  est positif (et même égal à 1), donc :

$$\boxed{n \text{ est un entier pair.}}$$

- e) On suppose de plus que  $A$  est une matrice orthogonale et symétrique. J'évalue  $f^* \circ f$  :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbf{E} \quad f^* \circ f(M) &= {}^tA(AM - MB) - (AM - MB){}^tB \\ &= {}^tAAM - AMB - AM{}^tB + MB{}^tB \\ &= 2M, \text{ compte tenu des hypothèses} \end{aligned}$$

Ainsi,  $f^* \circ f = 2\text{id}$ , autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}f \text{ est un automorphisme orthogonal de } \mathbf{E}.}$$

4. J'obtiens les colonnes de la matrice de  $f$  dans  $b$  en écrivant les images de  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  par  $f \dots$  Tous calculs faits :

$$\text{Mat}_b f = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & -b_{21} & a_{12} & 0 \\ -b_{12} & a_{11} - b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - b_{11} & -b_{21} \\ 0 & a_{21} & -b_{12} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}.$$

Résultat du 3.b) : je vérifie bien immédiatement que  $\text{Mat}_b f$  est nulle si et seulement si  $A$  et  $B$  sont diagonale, scalaires et égales.

Résultat du 3.c) : je vérifie bien que  $\text{Mat}_b f$  est symétrique si et seulement si  $A$  et  $B$  sont symétriques et cela est encore équivalent au fait que  $f$  soit autoadjoint, car  $b$  est une base orthonormale de  $\mathbf{E}$ .

Résultat du 4.b) : on suppose  $A$  orthogonale et symétrique, c'est-à-dire matrice de réflexion, de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$  ; et l'on suppose  $B$  orthogonale et antisymétrique, c'est-à-dire de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  (matrice de "quart de tour"). Il ne reste qu'à constater que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Mat}_b f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\varepsilon & \sin \theta & 0 \\ \varepsilon & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta & -\varepsilon \\ 0 & \sin \theta & \varepsilon & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

est bien une matrice orthogonale : ses quatre vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux !