Concours Communs Polytechniques - Session 2010

Corrigé de l'épreuve des mathématiques 2
Filière MP

Quelques utilisations des projecteurs

Corrigé par M.TARQI

I. Questions préliminaires

1. • Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   • Nous avons $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(A+B)^2 = I_2$ et et pour tout entier naturel k, $(A+B)^{(2k+1)} = A + B$ et $(A+B)^{2k} = I_2$ et par conséquent

   $$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} = \text{sh}(1)(A+B) + \text{ch}(1)I_2 = \begin{pmatrix} \text{ch}(1) & \text{sh}(1) \\ \text{sh}(1) & \text{ch}(1) \end{pmatrix}.$$

   • Nous avons : $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ est que $AB = BA$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* :Soit $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1, 2, ..., r$. Alors P admet r racines distinctes, donc il est nul et par conséquent $\ker \phi = \{0\}$, et comme $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = \dim \mathbb{R}^r$, l'application ϕ est bijective. En particulier, il existe un unique polynôme L vérifiant

   $$\phi(L) = (e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_r}),$$

   c'est-à-dire $\forall i = 1, 2, ..., r, \quad L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. (a) On a $l_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

   (b) Les l_i forment une base de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$, en effet, soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tel que $P = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i = 0$, donc $P(\lambda_j) = \alpha_j = 0$ et ceci pour tout $j = 1, 2, ..., r$. L étant un polynôme de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$, donc il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tels que

   $$L = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i l_i$$

   et comme $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ et $l_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$, alors

   $$L = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i.$$

5. *Une propriété de l'exponentielle :*

(a) L'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension fini, donc cette application est continue.

(b) Pour tout entier naturel, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = P \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} P^{-1}$ et par continuité de l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ on déduit que $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$.

6. Soit D une matrice diagonale formé par les valeurs propres de A et P une matrice inversibles telles que $A = PDP^{-1}$. D'après ce qui précède

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$

Notons $D = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ où les μ_i sont les valeurs propres de A. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} P\exp(D)P^{-1} &= P\text{diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, ..., e^{\mu_n})P^{-1} \\ &= \text{diag}(L(\mu_1), L(\mu_2), ..., L(\mu_n)) \\ &= L(PDP^{-1}) = L(A). \end{aligned}$$

D'où $\exp(A) = L(A)$.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $v^k(x) = \lambda^k x$, donc si $P = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i$, alors

$$P(v)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_i v^i(x) = \sum_{k=0}^{p} a_i \lambda^i x = P(\lambda)x.$$

8. (a) Soit $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$ avec $x_k \in E_k$ pour tout $k = 1, 2, ..., r$. Nous avons donc $v(x_k) = \lambda_k x_k$ pout tout k et $p_i(x_i) = l_i(v)(x_i) = l_i(\lambda_i)x_i = x_i$ et si $j \neq i$ $p_i(x_j) = l_i(v)(x_j) = l_i(\lambda_j)x_i = 0$, d'autre part $p_i^2 = p_i$, donc p_i est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus\limits_{k=1, k\neq i}^{r} E_k$.

(b) Soit (i, j) tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$ et $p_i^2 = p_i$. Si $v = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i p_i$, alors pour tout entier naturel k on peut écrire :

$$v^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$$

D'où $\exp(v) = \sum\limits_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} p_i$, cette égalité vectorielle, se tarduit matriciellement par l'expression demandée.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

9. Le polynôme minimal de u admet une racine double, donc u n'est pas diagonalisable.

10. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ répond à la question.

11. D'après le théorème de décomposition des noyaux, appliqué aux polynômes premiers entre eux $(X-1)^2$ et $X - 2$, on a :

$$E = \ker[(u - id)^2 \circ (u - id)] = \ker(u - id)^2 \oplus \ker(u - 2id).$$

12. Nous avons $p+q=(u-id)^2+u\circ(2id-u)=u^2-2u+id+2u-u^2=id$.
13. Soit $x\in\ker(u-2id)$, alors $p(x)=(u-id)^2(x)=u(u(x))-2u(x)+x=u(2x)-2u(x)+x=x$ et si $x\in\ker(u-id)^2$, $p(x)=(u-id)^2(x)=0$, de plus pour tout x de E, $p^2(x)=p(x)$, donc p est le projecteur sur $\ker(u-2id)$, parallèlement à $\ker(u-id)^2$.
$q=id-p$ est le projecteur sur $\ker(u-id)^2$, parallèlement à $\ker(u-2id)$.
14. Soit $x\in E$.
    (a) On a : $(u-2id)(p(x))=(u-id)\circ(u-id)^2(x)=0$.
    (b) D'après la question précédente, on a $u\circ p=2p$. Supposons $u^k\circ p=2^kp$, alors $u^{k+1}\circ p=u\circ(u^k\circ p)=u\circ 2^kp=2^ku\circ p=2^{k+1}p$, d'où pour entier naturel k, $u^k\circ p=2^kp$.
    (c) On a pour tout entier naturel k, $u^k\circ p=2^kp$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}u^k\circ p\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}2^kp\right)$, ou encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}u^k\right)\circ p=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}2^k\right)p$ donc $\exp(u)\circ p=e^2p$.
15. On a $(u-id)^2\circ q=p\circ q=0$, donc on peut vérifier par récurrence que $(u-id)^k\circ q=0$ pour tout entier naturel $k\geq 2$.
Donc $q+(u-id)\circ q=\exp(u-id)\circ q$, c'est-à-dire $u\circ q=\exp(u-id)\circ q$.
D'autre part, puisque $id\circ(u-id)=(u-id)\circ id$, alors
$$\exp(u)=\exp(id+u-id)=\exp(id)\circ\exp(u-id),$$
ainsi $\exp(u)\circ q=e\exp(u-id)\circ q=u\circ q$, d'où $\exp(u)\circ q=eu\circ q$.
16. D'après les questions 14. et 15., on a
$$\exp(u)=\exp(u)\circ(p+q)=e^2p+eu\circ q=e^2(u-id)^2+eu\circ(u\circ(2id-u),$$
donc $\exp(u)$ est un polynôme en u.

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

17. *Théorème de la projection orthogonale :* $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$.
18. *Cas des hyperplans :* On a pour tout $x\in E$, $x-p_F(xr)$ et n sont colinéaires, donc il exista $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $x-p_F(x)=\alpha n$, mais $(x-p_F(x)|n)=\alpha(n|n)$ et comme $(p_F(x)|n)=0$, alors $\alpha=\frac{(x|n)}{\|n\|}$, d'où
$$d(x,F)=|\alpha|\|n\|=\frac{|(x|n)|}{\|n\|}$$
19. *Une application :*
    (a) H est le noyau d'une forme linéaire, donc c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    Comme $I\notin H$, alors $H^{\perp}=\text{Vect}(I_n)$.
    (b) D'après la dernière question, $d(M,H)=\frac{|Tr(M)|}{\sqrt{Tr(I)}}=\frac{|Tr(M)|}{\sqrt{n}}$.
20. *Et pour une norme non euclidienne?* Soit $y=(\alpha,0)$ un vecteur quelconque de F, alors $N_\infty(x-y)=\max(|\alpha-1|,1)$, une étude de la fonction $\alpha\longmapsto\max(|\alpha-1|,1)$, montre que la borne inférieure vaut 1 et est atteinte sur l'intervalle $[0,2]$, donc l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte est $\{(\alpha,1)/\alpha\in[0,2]\}$.

• • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr