

PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'
 (Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'objet du problème est l'étude d'une suite définie par une intégrale pour en déduire des propriétés de la fonction Γ .

La lettre α désigne un réel strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$) ; pour simplifier certaines expressions la lettre β désigne $1/\alpha$ ($\beta=1/\alpha$). La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1 ; $n \geq 1$. Soit $u_n(\alpha)$ le réel défini par la relation :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Première partie

Étude de la suite des réels $u_n(\alpha)$.

1°) Convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n \geq 1}$.

- a. Vérifier que, pour tous les réels α et entiers n considérés, le réel $u_n(\alpha)$ est bien défini. Démontrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \geq 1}$ est convergente en étudiant sa monotonie.
- b. En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, démontrer que, pour tout réel a compris strictement entre 0 et 1 ($0 < a < 1$), l'inégalité :

$$u_n(\alpha) \leq a + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1},$$

a lieu. En déduire la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n \geq 1}$ lorsque n croît indéfiniment.

2°) Étude de suites et de séries liées à $(u_n(\alpha))$:

- a. Démontrer la relation ci-dessous liant $u_n(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$:
 (R)
$$u_n(\alpha) = n \alpha (u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

 Donner l'expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.
- b. Soit $U_n(\alpha)$ la somme des n premiers termes de la série de terme général $u_n(\alpha)$; déterminer $U_n(\alpha)$ en fonction du terme de la suite de rang $n+1$, $u_{n+1}(\alpha)$. Cette somme $U_n(\alpha)$ est définie par la relation :

$$U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n u_k(\alpha),$$

En déduire l'expression de $U_n(\alpha)$ en fonction du premier terme $u_1(\alpha)$ de la suite. Démontrer que la série de terme général $u_n(\alpha)$, $n \geq 1$, est divergente.

- c. Soit $(v_n(\alpha))_{n \geq 1}$ la suite de terme général :
$$v_n(\alpha) = \frac{u_n(\alpha)}{n}.$$

Démontrer que la somme $V_n(\alpha)$ des n premiers termes de la série de terme général $v_n(\alpha)$, $n \geq 1$, s'exprime à l'aide des deux réels $u_1(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$. Cette somme $V_n(\alpha)$ est définie par la relation :

$$V_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(\alpha)}{k}.$$

En déduire que la série de terme général $v_n(\alpha)$, $n \geq 1$, est convergente et calculer sa somme en fonction de $u_1(\alpha)$.

3°) Soit $(w_n(\alpha))_{n \geq 1}$ la suite des réels définis par la relation : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln(n)}{\alpha}$.

Démontrer que la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$, $n \geq 1$, est convergente. En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que le réel $u_n(\alpha)$ soit équivalent à l'infiniment petit :

$$\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}.$$

Deuxième partie

Fonction Γ ; limite du produit $n^{1/\alpha} u_n(\alpha)$.

Soit Γ la fonction définie par l'intégrale : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction Γ ; établir, pour tout réel x de l'ensemble de définition, la relation : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Démontrer que cette fonction est continue lorsque x est compris entre 1 et un réel A ($1 \leq x \leq A$) ; en déduire la continuité de la fonction Γ pour tout x de l'ensemble de définition.

2°) Équivalent de $u_n(\alpha)$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.

a. Soit $c_n(\alpha)$ le réel défini par la relation : $c_n(\alpha) = \alpha n^{1/\alpha} u_n(\alpha)$. Établir la relation :

$$\text{pour tout } t \geq 0, \quad e^{-nt^\alpha} \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

En déduire une minoration simple de $c_n(\alpha)$ à l'aide de $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

b. Soit ε un réel strictement compris entre 0 et 1. Démontrer qu'il existe un réel a strictement compris entre 0 et 1, tel que pour tout réel t de l'intervalle $[0, a]$, les deux inégalités :

$$t(1-\varepsilon) \leq \ln(1+t),$$

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha),$$

aient lieu.

c. En déduire un majorant du réel $c_n(\alpha)$ qui s'exprime à l'aide du réel $v_n(\alpha, \varepsilon)$ défini par la relation :

$$v_n(\alpha, \varepsilon) = \int_0^a \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha) dt + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}.$$

Déterminer, pour ε fixé, la limite du réel $\alpha n^{1/\alpha} v_n(\alpha, \varepsilon)$ lorsque n croît indéfiniment.

d. À partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $(c_n(\alpha))_{n \geq 1}$, puis un infiniment petit équivalent à $u_n(\alpha)$.

3°) En déduire la valeur du réel $K(\alpha)$ défini ci-dessus au moyen de la fonction Γ .

Troisième partie

Expression de $u_1(\alpha)$ en fonction de valeurs prises par la fonction Γ .

- 1°) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n(\alpha)x^n$. Soit F la somme de cette série entière ; cette fonction est définie dans l'intervalle de convergence

par la relation :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha) x^n .$$

Est-ce que la fonction F est définie pour $x = 1$? Rechercher le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1-x)^{\beta-1}$ dans un voisinage de l'origine ($\beta = 1/\alpha$). En déduire, à l'aide du terme $u_1(\alpha)$, l'expression de $F(x)$ dans l'intervalle $] -R, R[$.

- 2°) Soit la série entière de terme général $n^{-\beta} x^n$; ($\beta = 1/\alpha$). Déterminer son rayon de convergence ; soit G la fonction somme de cette série ; $G(x)$ est définie par la relation :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} x^n .$$

Est-ce que la fonction G est définie pour $x = 1$?

Établir que, pour x strictement compris entre 0 et 1 ($0 < x < 1$), la fonction : $t \mapsto t^{-\beta} x^t$, définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$, est décroissante ; en déduire un encadrement, pour tout entier n supérieur à 2, du terme $n^{-\beta} x^n$ et un infiniment grand équivalent à $G(x)$ lorsque x tend vers 1.

- 3°) Démontrer que, pour tout ε positif (inférieur à 1 ; $0 < \varepsilon < 1$), il existe un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N , l'encadrement :

$$(1 - \varepsilon) \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}} \leq u_n(\alpha) \leq (1 + \varepsilon) \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}} ,$$

ait lieu. En déduire que le réel $F(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 1. Préciser, à l'aide de $G(x)$, un infiniment grand équivalent à $F(x)$.

- 4°) a. Utiliser les résultats précédents pour exprimer $u_1(\alpha)$ en fonction de valeurs prises par la fonction Γ .
 b. Calculer $u_1(2)$; en déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Quatrième partie

Calcul de $u_1(\alpha)$.

Le réel β étant toujours égal à $1/\alpha$; soit φ la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\pi, \pi[$ par la relation :

$$\varphi(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x e^{i\theta}} dx .$$

Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies par la relation : $\varphi_n(\theta) = \int_{1/n}^n \frac{x^{\beta-1}}{1+x e^{i\theta}} dx .$

- 1°) a. Vérifier que la fonction φ est bien définie dans l'intervalle ouvert $I =]-\pi, \pi[$. Exprimer la valeur de $\varphi(0)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.
- b. Démontrer que la fonction φ_n est définie et continûment dérivable sur l'intervalle I .
- c. Établir que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers φ . Démontrer que la fonction φ est continûment dérivable.
- d. Dédire des résultats précédents que la fonction φ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire l'expression de $\varphi(\theta)$ en fonction de α , θ et $u_1(\alpha)$.

- 2°) Démontrer, à l'aide des résultats précédents, que l'expression $\alpha u_1(\alpha) \sin(\beta\theta)$ s'exprime à l'aide de l'intégrale $L(\theta)$ définie par la relation :

$$L(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\beta} \sin\theta}{1+2x \cos\theta + x^2} dx .$$

- 3°) Le réel θ est supposé, dans cette question, compris strictement entre 0 et π , $0 < \theta < \pi$.

- a. Calculer l'intégrale : $\int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{1+2x \cos\theta + x^2} dx .$
- b. Démontrer que l'expression $\alpha u_1(\alpha) \sin(\beta\theta) - \theta$ s'exprime à l'aide de l'intégrale $M(\theta)$ définie par la relation :

$$M(\theta) = \int_0^1 \frac{(1-x^{\beta})^2 dx}{x^{\beta} (1+2x \cos\theta + x^2)} .$$

- c. Démontrer que cette intégrale, qui est bien sûr définie lorsque θ appartient à l'intervalle I , est encore définie pour $\theta = \pi$.
- d. Dédire des résultats précédents l'inégalité :

$$\left| \alpha u_1(\alpha) \sin(\beta\theta) - \theta \right| \leq \frac{\sin(\theta)}{1-\beta} .$$

- e. En déduire la valeur de $u_1(\alpha)$ et celle du produit $\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)$.

- 4°) Soit p un entier supérieur ou égal à 2 ; calculer à l'aide des résultats précédents, l'intégrale :

$$K_p = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^p} .$$