A : Préliminaires sur les matrices symétriques

1. $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ **si, et seulement si,** $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$.
   $\Longrightarrow$ Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in Sp(S)$, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = \lambda X$,donc $X^T SX = \lambda X^T X$ et par suite $\lambda = \dfrac{X^T SX}{\|X\|_2^2} > 0$.
   $\Longleftarrow$ Le théorème spectral assure l'existence de $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que $S = P^T DP$ où $Sp(S) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^{*+}$.
   - Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en notant $Y = PX = (y_1, ..., y_n)^T$, on aura
   $X^T SX = (PX)^T D(PX) = Y^T DY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.
   Or P inversible, donc Y non nul et par suite $\exists i \in \{1, ..., n\}$ tel que $y_i \neq 0$, ce qui entraine
   $X^T SX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geq \lambda_i y_i^2 > 0$.
2. **Une matrice de** $S_n^{++}(\mathbb{R})$ **est de la forme** $R^T R$**où** $R \in GL_n(\mathbb{R})$.
   - On note $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, on obtient $S = P^T DP = (\Delta P)^T (\Delta P) = R^T R$ où $R = \Delta P \in GL_n(\mathbb{R})$.
   Réciproquement si $R \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $(R^T R)^T = R^T R$ et $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, RX est non nul, donc $X^T R^T RX = (RX)^T (RX) = \|RX\|_2^2 > 0$, où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.
3. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ **est convexe**.
   Soit $\lambda \in [0, 1]$ et $A, B \in S_n(\mathbb{R}^{++})$, alors λ et $1 - \lambda$ ne peuvent s'annuler en même temps, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, $X^T(\lambda A + (1-\lambda)B)X = \lambda X^T AX + (1-\lambda)X^T BX > 0$, donc $S_n(\mathbb{R}^{++})$ est convexe.

B : Autres Préliminaires

4. **L'enveloppe convexe d'un compact est compact**.
   Soit l'application $\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \end{array}$ où on a posé $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ et $x = (x_1, ..., x_{n+1})$.
   - φ est bilinéaire et la dimension de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ est finie, donc continue et par suite $Conv(K) = \varphi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$ est compact comme image continue d'un compact.
5. **Un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité est une similitude vectorielle.**
   Soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base ortonormée de E, alors pour tout $i \in \{2, ..., n\}$, $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ sont orthogonaux grâce à l'égalité $< e_1 + e_i, e_1 - e_i >= \|e_1\|^2 - \|e_i\|^2 = 0$, or g conserve l'orthogonalité, donc $0 =< g(e_1) + g(e_i), g(e_1) - g(e_i) >= \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$, c'est à dire $\|g(e_1)\| = ... = \|g(e_n)\| = k$.
   - Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\|g(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|g(e_i)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} k^2 x_i^2 = k^2 \|x\|^2$, ce qui donne $\forall x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$.
   - Si $k = 0$, rien à montrer.
   - Si $k > 0$, alors $\dfrac{1}{k} g = f$ conserve la norme, donc g est un automorphisme orthogonal, donc $g = kf$ est composée de l'homothétie de rapport k et de l'automorphisme orthogonal f.
6. $O_n(\mathbb{R})$ **est un sous-groupe compact de** $GL_n(\mathbb{R})$.
   - $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue (bilinéaire en dimension finie), $M \longmapsto M^T M$.
   - $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|^2 = Tr(M^T M) = Tr(I_n) = n$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est bornée.
   En conclusion $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné en dimension finie, donc c'est un compact.

C : Quelques propriétés de la compacité

7. **La suite** $(x_n)_n$ **n'admet pas de sous-suites extraites convergentes**.
   - S'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ extraite de $(x_n)_n$ convergente, alors elle serait de Cauchy et par suite pour $n \neq m$ assez grands $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}\| < \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite $(x_n)_n$.
8. $\forall \varepsilon > 0$ **un compact admet un recouvrement fini de boules de rayons** ε.
   - Si K est vide, rien à montrer.

- Si K n'est pas vide. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, ..., x_p \in E$, K n'est pas inclu dans $\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$.

- soit $u_0 \in K$, alors $\exists u_1 \in K \setminus B(u_0, \varepsilon)$ et par récurrence $\exists u_n \in K \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B(u_i, \varepsilon)$, ainsi $(u_n)_n$ est une suite de K vérifiant $\forall n \neq m$, $\|u_n - u_m\| \geq \varepsilon$.
- K étant compact, donc on peut extraire une sous-suite de $(u_n)_n$ convergente, ce qui est exclu par la question 7.
Remarque : Dans le raisonnement précédent, on peut remplacer E par K. Cette remarque sera utile dans la déduction de la question 9.

9. **De tout recouvrement d'ouverts d'un compact, on peut en extraire un fini.**
Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in K$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit incluse dans aucun des Ω_i et soit $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite extraite de $(x_n)_n$ convergente vers $x \in K$, alors $\exists j \in I$ tel que $x \in \Omega_j$ et vu que Ω_j est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega_j$.
- $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x et $(\varphi(n))_n$ tend vers $+\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(N)} \in B(x, \frac{r}{2})$ et $\frac{1}{\varphi(N)} < \frac{r}{2}$, donc $B(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)}) \subset B(x, r) \subset \Omega_j$, ce qui contredit que la boule $B(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)})$ n'est incluse dans aucun des Ω_i.
- D'après la question 8, pour $\varepsilon = \alpha$, il existe $x_1, ..., x_p \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \alpha)$ et d'après de ce qu'on vient de montrer, pour $x_i \in K$, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_i, \alpha) \subset \Omega_{i_k}$ et par suite $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

10. - Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide. Alors $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ où $\Omega_i = C_E^{F_i}$ ouvert comme complémentaire d'un fermé.
- La question précédente montre qu'il existe $\Omega_{i_1}, ..., \Omega_{i_p}$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$, donc $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} \subset C_E^K$, or cette intersection est aussi incluse dans K, donc elle est vide.

D : Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11. **N_G est une norme sur E.**
- Pour $x \in E$, l'application $\varphi_x : \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est continue comme application linéaire avec dimension de $L(E)$ est finie, donc $u \longmapsto \|u(x)\|$ est continue comme composée d'applications continues et par suite elle est bornée sur le compact G, ce qui assure l'existence de $N_G(x)$.
- Soit $x \in E$ tel que $N_G(x) = 0$, or il existe $u \in G$ tel que $N_G(x) = \|u(x)\| = 0$, or $u \in GL(E)$, donc $x = 0$.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall u \in G$, $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \|x\|$, donc par passage au sup, $N_G(\lambda x) = |\lambda| N_G(x)$.
- Soit $x, y \in E$, $\forall u \in G$, $\|u(x + y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$, ce qui donne par passage au sup que $N_G(x + y) \leq N_G(x) + N_G(y)$.

12. **Un élément de G conserve la norme N_G.**
• Soit $u \in G$, $x \in E$, alors :
- $\forall v \in G$, $\|v(u(x))\| \leq N_G(x)$, donc $N_G(u(x)) \leq N_G(x)$.
- $\forall v \in G$, $\|v(x)\| = \|vou^{-1}(u(x))\| \leq N_G(u(x))$, donc $N_G(x) \leq N_G(u(x))$.
Égalité de Minkowski.
• - Si $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$, alors $N_G(x + y) = N_G((1 + \lambda)x) = |1 + \lambda| N_G(x) = (1 + \lambda) N_G(x) = N_G(x) + N_G(\lambda x) = N_G(x) + N_G(y)$.
- Supposons que $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ et soit $u \in G$ tel que $N_G(x + y) = \|u(x + y)\|$ égalité déjà justifiée à la question 11, alors en levant au carré et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $N_G^2(x) + N_G^2(y) + 2N_G(x)N_G(y) = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2 < u(x), u(y) > \leq N_G^2(x) + N_G^2(y) + 2 < u(x), u(y) > \leq N_G^2(x) + N_G^2(y) + 2\|u(x)\|\|u(y)\| \leq N_G^2(x) + N_G^2(y) + 2N_G(x)N_G(y)$.
Ces inégalités deviennent des égalités, donc $< u(x), u(y) >= \|u(x)\|\|u(y)\|$ et l'égalité de Cauchy-Schwarz sans valeur absolue exige que $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

13. **Un compact stable par $u \in L(E)$ contient un point fixe de u.**
- $x \in K$ est K est stable par u, donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $u^i(x) \in K$ et par convexité de K, on aura
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) \in K$.

Ainsi $(x_n)_n$ est une suite de K qui est compact, donc on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_n$ convergente vers un élément $a \in K$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u(x_n)-x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(u^{i+1}(x)-u^i(x)) = \frac{1}{n}(u^n(x)-x)$, donc $\|u(x_n)-x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x)-x\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$ et la continuité de $\|.\|$ et u entraine par passage à la limite, $\|u(a)-a\| = 0$, donc $u(a) = a$.

14. - Soit $x \in K$. K étant stable par $u_1, ..., u_r$, donc $u_1(x), ..., u_r(x)$ sont des éléments de K, et puisque K est convexe, $u = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(x) \in K$.
- Les hypothèses de la question 13, sont vérifiées, donc u admet un point fixe $a \in K$.

15. - D'après la question 12, $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$, donc $N_G(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)) = N_G(a) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(a) = \frac{1}{r}N_G(u_i(a))$.
- On vient de montrer que $\forall u_1, ..., u_r \in G$, $N_G(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)) = \sum_{i=1}^{r} N_G(a)$, donc en appliquant cette égalité la famille $(u_i)_{i\neq j}$, on obtient $N_G(\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} u_i(a)) = \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} N_G(u_i(a))$, et par suite

$$N_G(u_j(a) + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} u_i(a)) = \sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(u_j(a)) + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} u_i(a)).$$

16. **Existence des λ_j.**
- La question 12 appliquée à l'égalité précédente, entraine qu'il existe $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{r} u_i(a) = \lambda_i u_j(a)$ et par suite $u(a) = \frac{1+\lambda_j}{r}u_j(a)$.

17. **a est un point fixe de tous les endomorphismes de u_i.**
- Si $a = 0$, alors a est un point fixe des u_i.
- Si $a \neq 0$, alors en posant $\alpha_i = \frac{r}{1+\lambda_i}$, on vient de montrer que pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $u_i(a) = \alpha_i u(a) = \alpha_i a$, donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_i^p(a) = \alpha_i^p a \in K$ qui est borné, donc la suite positive $(\alpha_i^p)_p$ est bornée, ce qui exige $\alpha_i \leq 1$ pour tout i, or l'égalité $u(a) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)$ conduit à $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = r$, donc $0 = r - \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \sum_{i=1}^{r}(1-\alpha_i)$ somme nulle de termes positifs, ce qui entraine que $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $\alpha_i = 1$.

18. **a est un point fixe de tous les endomorphismes de G.**
- Raisonnons par l'absurde et supposons que $\forall a \in K$, $\exists u_a \in G$ tel que $u_a(a) \neq a$, alors $K \subset \bigcup_{a\in K}\Omega_a$ où $\Omega_a = C_K^{Ker(u_a-id)}$ ouvert de K comme complémentaire d'un noyau d'une application continue.
On aura $\bigcap_{a\in K} Ker(u_a - id) = \emptyset$ et en appliquant le résultats de la question 10, on obtient l'existence de $u_1, ..., u_r \in G$ tel que $\bigcap_{i=1}^{p} Ker(u_i - id) = \emptyset$.
- On pose $u = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i$, alors les questions précédentes entrainent que $u_1, ..., u_r$ ont un point fixe commun, ce qui contredit $\bigcap_{i=1}^{p} Ker(u_i - id) = \emptyset$.

E : Sous-groupes compactsde $GL_n(\mathbb{R})$

19. **ρ_A est un automorphisme est H est un compact.**
- ρ_A est clairement linéaire, de plus l'inversibilité de A entraine $\rho_A(M) = 0_n \Longrightarrow M = 0_n$.
- $\rho_{I_n} = id_{M_n(\mathbb{R})} \in H$.
- Pour tous $A, B \in G$, $\rho_A o \rho_B = \rho_{AB} \in H$.
- Pour tout $A \in G$, $\rho_A^{-1} = \rho_{A^{-1}} \in H$.

On définit sur $L(M_n(\mathbb{R}))$ la norme $|||\varphi||| = Sup_{\|M\|=1}\|\varphi(M)\|$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $< .,. >$.
L'ensemble $\mathcal{S}(0,1) = \{M \in M_n(\mathbb{R})\ ,\ \|M\| = 1\}$ est la sphère unité de $M_n(\mathbb{R})$ qui est compacte, donc $\exists M \in \mathcal{S}(0,1)$ tel que $|||\rho_A||| = \|\rho_A(M)\|$.
- Soit $(A_n)_n$ une suite de $M_n(\mathbb{R})$ convergente vers A, alors
$|||\rho_{A_n} - \rho_A||| = \|(\rho_{A_n} - \rho_A)(M)\| = \|\rho_{A_n}(M) - \rho_A(M)\|$, or l'application $A \longmapsto \rho_A(M)$ est continue,donc $\|\rho_{A_n}(M) - \rho_A(M)\| \longrightarrow 0$, c'est à dire $\rho_{A_n} \longrightarrow \rho_A$ ce qui assure la continuité de l'application φ.
- $H = \varphi(G)$ est un compact comme image continue d'un compact.

20. Δ **est un compact contenu dans** $S_n{+}{+}(\mathbb{R})$.
- L'application $\varphi : M \longmapsto M^TM$ est continue comme application à composantes polynômiales. Δ est l'image continue du compact G par φ, donc Δ est compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ par la question 2.
K **est compact stable par les éléments de** H.
- $K = Conv(\Delta)$ est un compact par la question 4, contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de ce dernier (question 3).
- Soit $M = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i^T A_i \in K$ où les A_i sont dans G et $(\lambda_1,,,\lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$ et soit $A \in G$, alors par linéarité de ρ_A, $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \rho_A(A_i^T A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (A_iA)^T(A_iA) \in Conv(\Delta) = K.$

21. **EXistence d'un sous-groupe** G_1 **de** $O_n(\mathbb{R})$ **tel que** $G = N^{-1}G_1N$.
- K étant compact convexe stable par tous les éléments du sous-groupe compact $\mathcal{H}$ de $GL(M_n(\mathbb{R}))$, ce qui permet d'appliquer le resultat de la partie D, c'est à dire $\exists M \in K$ tel que $\forall A \in G$, $\rho_A(M) = M$.
- $M \in K$, donc $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et la question 2 assure l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^TN$, et par suite $\exists N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in G$, $\rho_A(M) = A^TN^TNA = N^TN$, ce qui s'ecrit $(NAN^{-1})^T(NAN^{-1}) = I_n$, c'est à dire $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soit $G_1 = \{NAN^{-1}\ \ A \in G\}$, alors G_1 est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ comme image du sous-groupe G par l'application linéaire $M \longmapsto NMN^{-1}$, et on a bien $A \in G$ si, et seulement si, $NAN^{-1} \in G_1$, donc $G = N^{-1}G_1N$

22. $go\sigma_Pog^{-1} = \sigma_{g(P)}$.
- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ la matrice de σ_P dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qu'on munit du produit scalaire usuel, alors $S \in O_n(R)$ (σ_P est un automorphisme orthogonal).
- $(NSN^{-1})^2 = NS^2N^{-1}NI_nN^{-1} = I_n$, donc $go\sigma_Pog^{-1}$ est une symétrie, de plus K contient $O_n(\mathbb{R})$, donc $S \in K$ et puisque $NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$, on aura $NSN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, donc $go\sigma_Pog^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $x \in Ker(go\sigma_Pog^{-1} - id_{\mathbb{R}^n})$ si, et seulement si, $\sigma_P(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ si, et seulement si, $g^{-1}(x) \in P$ si, et seulement si, $x \in g(P)$, de plus g bijective, donc $g(P)$ est aussi un hyperplan comme P, ceci assure que $go\sigma_Pog^{-1}$ est la symétrie orthogonal par rapport à l'hyperplan $g(P)$.
g **conserve l'orthogonalité**.
- Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ non nuls tel que $< x, y >= 0$, et soit σ_P la symétrie orthogonale par rapport à $P = (Vect(x))^\perp$, alors $\sigma_P(y) = y$ et $\sigma_P(x) = -x$, donc $< g(x), g(y) >=< \sigma_{g(P)}(g(x)), \sigma_{g(P)}(g(y)) >=< g(\sigma_P(x)), g(\sigma_P(y)) >=< -g(x), g(y) >= - < g(x), g(y) >$, donc $< g(x), g(y) >= 0$.
$K = O_n(\mathbb{R})$.
On vient de montrer que g conserve l'orthogonalité, donc d'après la question 5, $N = \lambda R$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $R \in O_n(\mathbb{R})$.
- L'inclusion $NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$ entraine que $K \subset N^{-1}O_n(\mathbb{R})N = R^{-1}O_n(\mathbb{R})R \subset O_n(\mathbb{R})$ et déjà $O_n(\mathbb{R}) \subset K$, donc $K = O_n(\mathbb{R})$.