Centrale 2005 – filière MP – Mathématiques I

(Jean-Pierre Roudneff, Louis-le-Grand)

Partie I

A.1) – Pour toutes fonctions x et y de $\mathcal{B}$ et tous nombres complexes λ et μ, on a

$$M_T(\lambda x+\mu y) = \frac{1}{T}\int_0^T (\lambda x+\mu y)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda M_T(x) + \mu M_T(y)$$

par linéarité de l'intégrale : l'application M_T est donc une forme linéaire sur $\mathcal{B}$.

– Si x et y appartiennent à $\mathcal{M}_1$ et λ et μ à $\mathbb{C}$, alors $\lambda M_T(x) + \mu M_T(y)$ possède une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$, égale à $\lambda M(x) + \mu M(y)$. Il en résulte que $\mathcal{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ et que M est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_1$.

2) Par positivité de l'intégrale, $|M_T(x)| \leqslant \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{T}\int_0^T \|\,x\,\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant \|\,x\,\|_\infty$. En passant à la limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$, on en déduit que $\forall x \in \mathcal{M}_1,\ \ |M(x)| \leqslant \|\,x\,\|_\infty$.

Les applications M_T et M, linéaires sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{M}_1$ respectivement, sont ainsi 1-lipschitziennes (donc continues).

B. On remarque que

$$M_T(x_\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} x(t)\,\mathrm{d}t = M_T(x) - \frac{1}{T}\Big[\int_{-\tau}^0 x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{T-\tau}^T x(t)\,\mathrm{d}t\Big].$$

La quantité entre crochets étant clairement bornée par $2|\tau|\times \|\,x\,\|_\infty$, on en déduit que $M_T(x_\tau)$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $T \longrightarrow +\infty$, égale à $M\,x$. On a donc $x_\tau \in \mathcal{M}_1$ et $M\,x = M\,x_\tau$.

C.1) – D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+P} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^P x(t)\,\mathrm{d}t + \int_P^{a+P} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variables $t := t-P$ et la périodicité de x permettent alors d'écrire

$$\int_P^{a+P} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a x(t+P)\,\mathrm{d}t = \int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{d'où} \quad \int_a^{a+P} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^P x(t)\,\mathrm{d}t.$$

– Pour tout $T > 0$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{E(T/P)-1}\int_{kP}^{(k+1)P} x(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{1}{T}\int_{E(T/P)P}^T x(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne, d'après le résultat précédent : $M_T(x) = \dfrac{E(T/P)}{T}\displaystyle\int_0^P x(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{1}{T}\int_0^{T-E(T/P)P} x(t)\,\mathrm{d}t.$

Or l'encadrement $\dfrac{T}{P} - 1 < E(\dfrac{T}{P}) \leqslant \dfrac{T}{P}$ entraîne que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{E(T/P)}{T} = \frac{1}{P}$ ainsi que les inégalités

$$\Big|\int_0^{T-E(T/P)P} x(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_0^{T-E(T/P)P} |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^P |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant P\,\|\,x\,\|_\infty\,.$$

Par suite, la limite de $M_T(x)$ lorsque $T \longrightarrow +\infty$ existe bien et vaut $\dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P x(t)\,\mathrm{d}t$, alias la moyenne de x sur une période quelconque.

2) – Si $\omega \in \mathbb{R}^*$, alors e_ω est continue, périodique de période $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$, donc $M(e_\omega)$ existe et vaut

$$\frac{|\omega|}{2\pi}\int_0^{2\pi/|\omega|} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{|\omega|}{2\pi}\Big[\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\Big|_0^{2\pi/|\omega|} = 0.$$

– Enfin, e_0 est continue et (par exemple) 1-périodique donc $M(e_0) = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.$

3) – Si $c = 0$, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \geqslant A,\ |x(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent,

$$\forall T \geqslant A, \quad |M_T(x)| \leqslant \frac{1}{T}\Big|\int_0^A x(t)\,\mathrm{d}t\Big| + \frac{1}{T}\int_A^T \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t.$$

ε étant fixé, A l'est aussi donc $\exists B \in \mathbb{R}\ /\ \forall T \geqslant B,\ \dfrac{A}{T}\ \|x\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
En résumé, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists C (= \max(A, B))\ /\ \forall t \geqslant C,\ |M_T(x)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $M(x)$ existe et vaut 0.

– Si c est un complexe quelconque, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $y := x - ce_0$ et d'utiliser la linéarité de M pour en déduire que $x \in \mathcal{M}_1$ et $M(x) = c$.

4) – La fonction x_0 est clairement continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$ et admet en 0^+ et en 0^- des limites égales à 0 et 1 respectivement. De plus, $\forall t \in \mathbb{R},\ |x_0(t)| \leqslant 1$ donc $x_0 \in \mathcal{B}$.

– Si $T \leqslant 0$, alors $M_T(x_0) = 0$ et si $T > 0$, $M_T(x_0) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{i\ln(t+1)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^{\ln(T+1)} e^{iu}(e{-}1)\,\mathrm{d}u$ (par le changement de variable $u = \ln(t{+}1)$), donc

$$M_T(x_0) = \frac{1}{T}\Big[\frac{e^{(i+1)u}}{i+1} - \frac{e^{iu}}{i}\Big]_0^{\ln(T+1)} = \frac{T{+}1}{(i{+}1)T}e^{i\ln(T+1)} - \frac{1}{(i{+}1)T} - \frac{1}{iT}e^{i\ln(T+1)} + \frac{1}{i}.$$

Les trois derniers termes ont une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $T \longrightarrow +\infty$. En revanche, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{T{+}1}{(i{+}1)T} = \frac{1}{i{+}1} \neq 0$ mais $e^{i\ln(T+1)}$ n'a pas de limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$ (en effet, cette expression prend les valeurs 1 si T s'écrit $e^{2n\pi} - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, et -1 si T s'écrit $e^{(2n+1)\pi} {-} 1$).
Il en résulte que x_0 n'est pas moyennable.

D.1) Si la fonction x (supposée bien sûr dans $\mathcal{B}$) a une limite nulle en $+\infty$, il en est de même de $|x|^2$ donc d'après la question **C)3)**, $|x|^2$ est moyennable et $M\,|x|^2 = 0$.

2) Déjà, $|M_T(|x|^2) - M_T(|y^2|)| = \dfrac{1}{T}\Big|\displaystyle\int_0^T \big(|x^2(t)| {-} |y^2(t)|\big)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \dfrac{1}{T}\int_0^T \big||x^2(t)| {-} |y^2(t)|\big|\,\mathrm{d}t$ pour $T > 0$.
Or $\big||x^2(t)| - |y^2(t)|\big| = \big||x(t)| - |y(t)|\big| \times \big||x(t)| + |y(t)|\big| \leqslant \|\,x\,\|_\infty \|\,y\,\|_\infty \|\,x - y\,\|_\infty$ et, par passage à la limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$, il vient : $\big|M\,|x|^2 - M\,|y^2|\big| \leqslant \big(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty\big)\ \|x{-}y\|_\infty$.

3) Les fonctions x_0 et U appartiennent à $\mathcal{M}_2$ car elles sont continues par morceaux et de module constant sur $\mathbb{R}_*^+$ (le **C.3)** est donc applicable au carré de leur module).
Si $\mathcal{M}_2$ était un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $y = x_0 {+} U$ et $z = x_0 {+} iU$ seraient dans $\mathcal{M}_2$, ce qui entraînerait que $x_0 = \dfrac{1}{2}\big(|y|^2 {-} |z|^2\big)$ serait moyennable : contradiction.

E.1) En suivant l'indication de l'énoncé,

$$|x{+}y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + xy^* + x^*y \quad \text{et} \quad |x{+}iy|^2 = |x|^2 + |y|^2 + i(x^*y - xy^*)$$

d'où $xy^* = \dfrac{1}{2}\Big[|x{+}y|^2 - |x|^2 - |y|^2 + i\big(|x{+}iy|^2 {-} |x|^2 - |y|^2\big)\Big]$. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, les fonctions $x,\ y,\ x{+}y$ et $x{+}iy$ sont de carrés moyennables, donc $M(xy^*)$ existe.

2) Si x et y sont orthogonales, on obtient le "théorème de Pythagore" : $M\,|x{+}y|^2 = M\,|x|^2 + M\,|y|^2$.

3) L'inégalité de Schwarz s'énonce dans notre contexte : $|{<}x\,|\,y{>}| \leqslant \sqrt{M\,|x|^2} \times \sqrt{M\,|y|^2}$.
Remarque : elle s'établirait par le même procédé que pour un produit scalaire hermitien, la stricte positivité n'intervenant pas dans la démonstration.

F. – L'ensemble E_P des fonctions P-périodiques de $\mathcal{B}$ est non vide et clairement stable par combinaisons linéaires : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.
– Si $x \in E_P$, on a aussi $|x|^2 \in E_P$, qui est moyennable d'après **I.C)1)**.
– Enfin, si $x, y \in E_P$, alors x et y sont comparables : il suffit d'appliquer le **E.1)** à l'espace $E = E_P$.

G. – Le produit de deux fonctions $t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{K} a_k e^{i\alpha_k t}$ et $t \longmapsto \displaystyle\sum_{\ell=1}^{L} b_k e^{i\beta_\ell t}$ de $\mathcal{P}$ est une combinaison linéaire de fonctions du type e_ω, où $\omega \in \{\alpha_k {+} \beta_\ell,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant \ell \leqslant L\}$: c'est donc un élément de $\mathcal{P}$.
– D'après la conséquence énoncée au **E.1)**, $(x, y) \longmapsto {<}x\,|\,y{>}$ est un "pseudo-produit scalaire", dont il reste à établir la définie-positivité et le caractère hermitien.
En remarquant que, pour $\omega \neq \omega'$, ${<}e_\omega\,|\,e_{\omega'}{>} = M(e_{\omega-\omega'}) = 0$, l'orthogonalité de e_{ω_k} et e_{ω_ℓ} pour $k \neq \ell$ permet d'étendre le théorème de Pythagore du **E.2)** et d'écrire $M\Big(\Big|\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k e_{\omega_k}\Big|^2\Big) = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 M\,|e_{\omega_k}|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$ (avec les notations de l'énoncé, c'est-à-dire en supposant $\omega_k \neq \omega_\ell$ si $k \neq \ell$).
En particulier, $M\,|x|^2 = 0$ ssi $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = 0$ ssi $\forall k \in [\![1, N]\!] = 0$ ssi $x = 0$. La relation ${<}y\,|\,x{>} = \overline{{<}x\,|\,y{>}}$ découlant d'un passage à la limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$ dans l'égalité immédiate $M_T(xy^*) = \overline{M_T(yx^*)}$, on peut conclure que

$(x,y) \longmapsto <x\,|\,y>$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{P}$.

H.1) Pour tous $n,p \in \mathbb{N}$, $\left|M(x_{n+p}) - M(x_n)\right| \leqslant \| x_{n+p} - x_n \|_\infty \leqslant \| x_{n+p} - x \|_\infty + \| x - x_n \|_\infty$.
La convergence uniforme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x implique alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left|M(x_{n+p}) - M(x_n)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

La suite $(M\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi de Cauchy, donc converge vers un certain nombre complexe m étant donné que $\mathbb{C}$ est complet.

2) L'existence des limites permet de choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\| x - x_n \|_\infty < \varepsilon$ et $|m - M(x_n)| < \varepsilon$, où ε désigne un réel strictement positif donné. Alors, pour tout $T > 0$,

$$\begin{array}{rcl} |M_T(x) - m| & \leqslant & |M_T(x) - M_T(x_n)| + |M_T(x_n) - M(x_n)| + |M(x_n) - m| \\ & \leqslant & \| x - x_n \|_\infty + |M_T(x_n) - M(x_n)| + \varepsilon \\ & \leqslant & |M_T(x_n) - M(x_n)| + 2\varepsilon. \end{array}$$

Or, n étant fixé, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} M_T(x_n) = M(x_n)$ donc il existe $T_0 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\forall T \geqslant T_0$, $|M_T(x_n) - m| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui établit que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} M_T(x) = m$ et en particulier le fait que $x \in \mathcal{M}_1$.

I.1) L'inégalité $\| x_n \|_\infty \leqslant \| x_n - x \|_\infty + \| x \|_\infty$ et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x montrent que la suite $(\| x_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc justifient l'existence de K.
Remarque : on retrouve que toute limite uniforme d'applications bornées est bornée.

2) Comme $\| x_n^2 - x^2 \|_\infty \leqslant \| x_n - x \|_\infty \times \| x_n + x \|_\infty \leqslant 2K \,\| x_n - x \|_\infty$, la suite $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction x^2 dans $\mathcal{B}$.
L'existence de $m_2 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\,|x_n|^2$ découle alors du **H.1)**.

3) La méthode est exactement la même qu'au **H.2)** : on écrit

$$|M_T|x|^2 - m_2| \leqslant |M_T|x|^2 - M_T|x_n|^2| + |M_T|x_n|^2 - M|x_n|^2| + |M|x_n|^2 - m| \leqslant 2\varepsilon + |M_T|x_n|^2 - M|x_n|^2|$$

en ayant choisi n tel que $|m_2 - M|x_n|^2| \leqslant \varepsilon$ et $\|\,|x|^2 - |x_n|^2\,\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (et vérifié au passage que $(|x_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|x|^2$). Un passage à la limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$ conduit alors au résultat.

Partie II

A.1) – Si x et y sont limites uniformes des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$, alors $\lambda x_n + \mu y_n$ (à valeurs dans $\mathcal{P}$ par propriétés d'espace vectoriel) converge uniformément vers $\lambda x + \mu y$. Par suite, $\lambda x + \mu y \in \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}$ est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

– Comme $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$, toute limite uniforme d'éléments de $\mathcal{P}$ appartient encore à $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ d'après les questions **I.H.2)** et **I.I.3)**, donc $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

– Soit enfin $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Q}$ qui converge uniformément vers un certain $x \in \mathcal{B}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ \| q_n - x \|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Par définition de $\mathcal{Q}$, il existe $x_n \in \mathcal{P}$ tel que $\| q_n - x_n \|_\infty \leqslant \varepsilon$, d'où $\forall n \geqslant n_0$, $\| x_n - x \|_\infty \leqslant 2\varepsilon$, ce qui établit que $x \in \mathcal{Q}$.
Par caractérisation séquentielle, $\mathcal{Q}$ est ainsi un fermé de $\mathcal{B}$.
Remarque : question très mal formulée; il fallait comprendre "fermé de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_\infty)$*".*

2) – Deux fonctions x et y de $\mathcal{Q}$ sont comparables, par application du **I.E.1)**.
– Toute fonction de $\mathcal{Q}$ est continue, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

3) Soit $x \in \mathcal{Q}$, limite uniforme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$. Alors $\| x_\tau - (x_n)_\tau \|_\infty = \| x - x_n \|_\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| x_\tau - (x_n)_\tau \|_\infty = 0$.
Or $\mathcal{P}$ est invariant par translation sur la variable (en effet, si $x(t)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\omega_k t}$, alors $x_\tau(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} d_k e^{i\omega_k t}$, avec $d_k = c_k e^{-i\omega_k \tau}$).
Par conséquent, x_τ est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathcal{P}$ donc appartient à $\mathcal{Q}$.

4) Comme $\| c_k e_{\omega_k} \|_\infty = |c_k|$, la convergence de la série $\sum |c_k|$ traduit la convergence normale de la série de fonctions définissant x.
En particulier, x est limite uniforme de la suite $\big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ formée d'éléments de $\mathcal{P}$, donc $x \in \mathcal{Q}$.

5) Soit x et y des éléments de $\mathcal{Q}$, limites uniformes des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{P}$; montrons que $xy \in \mathcal{P}$.
Déjà, $x_n y_n$ appartient à $\mathcal{P}$ pour tout entier n car $\mathcal{P}$ est stable par produit. De plus,

$$\|xy - x_n y_n\|_\infty \leqslant \|xy - xy_n\|_\infty + \|xy_n - x_n y_n\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty \|y - y_n\|_\infty + \|x - x_n\|_\infty \|y_n\|_\infty$$

et cette dernière somme tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|y - y_n\|_\infty = 0$ et que la suite $(\|y_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après **I.I.1)**.
On peut alors conclure que $\mathcal{Q}$ est stable par produit.
Remarque : $\mathcal{Q}$ est même une sous-algèbre de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}), +, \times, .)$

6) – Si y est polynomiale et $x \in \mathcal{Q}$, alors $y \circ x$ s'écrit $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ donc appartient à $\mathcal{Q}$ par propriétés d'algèbre de $\mathcal{Q}$.
– Dans le cas général, observons tout d'abord que, l'application x étant bornée, seule la continuité de y sur $[-M, M]$, avec $M = \|x\|_\infty$, est utile. Or sur ce segment, y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Weierstrass, soit $\sup\big\{|y_n(u) - y(u)|,\ \ u \in [-M, M]\big\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme x est à valeurs dans $[-M, M]$, on a aussi $\sup\big\{|y_n \circ x(t) - y \circ x(t)|,\ \ t \in \mathbb{R}\big\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent, $y \circ x$ est limite uniforme d'une suite de fonctions du type $y_n \circ x$ avec y_n polynomiale, donc $y \circ x \in \mathcal{Q}$ en utilisant la première partie du raisonnement et le fait que $\mathcal{Q}$ soit un fermé de $\mathcal{P}$ pour la norme de la convergence uniforme.

B. – $\mathcal{Q}$ étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel inclus dans $\mathcal{M}_2$ et contenant x et e_ω, le produit scalaire $<x \,|\, e_\omega>$ existe d'après la question **I.E.1)**.
– De plus, la convergence uniforme de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x entraîne facilement celle de $(P_n e_\omega^*)_{n\in\mathbb{N}}$ vers xe_ω^*. Cette dernière suite étant à valeurs dans $\mathcal{M}_1$, le **I.H.** garantit que $\lim\limits_{n\to+\infty} M(P_n e_\omega^*)$ existe et vaut $M(xe_\omega^*)$, ce qui s'écrit encore : $c(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} <P_n \,|\, e_\omega>$.
– Si $\omega \notin \Omega$, on a $<P_n \,|\, e_\omega> = 0$ pour tout n par orthogonalité de e_ω et e_{ω_k}, ce qui donne $c(\omega) = 0$.
– Enfin, si $\omega = \omega_k$ avec $k \in \Omega$, alors $c(\omega_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} <P_n \,|\, e_{\omega_k}> = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{n,k}$ en utilisant à nouveau les propriétés d'othogonalité.

C. Si Ω est fini, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\sum\limits_{k\in\Omega} c_k e_{\omega_k}$ d'après ce qui précède. Par unicité de la limite, il vient $x = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}$, égalité qui implique $M\,|x|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} |c_k|^2$ d'après le **I.G.**.

D.1) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,

$$<x - S_N \,|\, e_{\omega_k}> = <x \,|\, e_{\omega_k}> - <S_N \,|\, e_{\omega_k}> = c_k - \sum_{i=0}^{N} c_i <e_{\omega_i} \,|\, e_{\omega_k}> = c_k - c_k = 0.$$

Par combinaison linéaire, $x - S_N$ est donc orthogonal à S_N.
En écrivant $x = (x - S_N) + S_N$, le théorème de Pythagore énoncé au **I.E.2)** donne

$$M\,|x|^2 = M\,|x - S_N|^2 + M\,|S_N|^2, \quad \text{d'où} \quad M\,|x - S_N|^2 = M\,|x|^2 - \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2.$$

En particulier, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} |c_k|^2 \leqslant M\,|x|^2$: la série à termes positifs $\sum |c_k|^2$ est donc convergente, de somme au plus égale à $M\,|x|^2$.

2) Le raisonnement ci-dessus montre que $x - S_{d_k}$ est orthogonal à chaque ω_j, $0 \leqslant j \leqslant d_k$, donc au sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions. Celui-ci contenant $S_{d_k} - q_k$, on obtient :

$$M\,|x - q_k|^2 = M\,|x - S_{d_k}|^2 + M\,|S_{d_k} - q_k|^2,$$

d'où $M\,|x - q_k|^2 \geqslant M\,|x - S_{d_k}|^2$, soit $M\,|x - q_k|^2 \geqslant M\,|x|^2 - \sum\limits_{j=0}^{d_k} |c_j|^2$ par des calculs similaires à ceux qui précèdent.

3) Comme la suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers x et que q_k appartient à $\mathcal{M}_2$ d'après le **I.I**, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} M\,|q_k|^2 = M\,|x|^2$, soit $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{d_k} |c_j|^2 = M\,|x|^2$.

On en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} M\,|x - q_k|^2 = 0$ d'où, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} M\,|x - S_n|^2 = 0$ et $M\,|x|^2 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2$.

Partie III

A. Pour une fonction stationnaire, $\gamma_x(0) = <x\,|\,x>$, alias $M\,|x|^2$, existe, donc x appartient à $\mathcal{M}_2$.

B. – L'inégalité de Schwarz du **I.B)** appliquée aux fonctions x et x_τ de M_2 s'écrit :

$$|\gamma_x(\tau)|^2 = |<x\,|\,x_\tau>| \leqslant <x\,|\,x><x_\tau\,|\,x_\tau> = M\,|x|^2 \times M\,|x_\tau|^2 = \big(M\,|x|^2\big)^2.$$

On en déduit $|\gamma_x(\tau)| \leqslant M\,|x|^2$, c'est-à-dire $|\gamma_x(\tau)| \leqslant \gamma_x(0)$.
– En remarquant que $\gamma_x(-\tau) = <x\,|\,x_{-\tau}> = <x_\tau\,|\,x>$ (par invariance de la moyenne par translation sur la variable), il vient : $\gamma_x(-\tau) = \overline{<x\,|\,x_\tau>} = \gamma_x(\tau)^*$.

C. yy_τ^* est définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \ yy_\tau^*(t) = x(t)x_\tau^*(t)e^{i\omega\tau}$.
Comme $e^{i\omega\tau}$ est une constante et x est stationnaire, on a donc aussi $yy_\tau^* \in \mathcal{M}_1$ et de plus,

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ \ \gamma_y(\tau) = M(yy_\tau^*) = e^{i\omega\tau}M(xx_\tau^*) = e^{i\omega\tau}\gamma_x(\tau).$$

D.1) Si x appartient à $\mathcal{Q}$, il en est de même de x_τ d'après **II.A.3)**, ainsi que de x_τ^*, donc $xx_\tau \in \mathcal{Q}$.
En particulier, xx_τ^* appartient à $\mathcal{M}_1$ pour tout réel τ, donc x est stationnaire.

2) Si $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}$, alors $(S_n)_\tau^* = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{c_k} e^{i\omega_k\tau} e_{-\omega_k}$ et, comme $<e_{\omega_k}\,|\,e_{\omega_\ell}> = \delta_{k,\ell}$, on en déduit très facilement l'égalité $\gamma_{S_n}(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n} |c_k|^2 e^{i\omega_k\tau}$.

3) – La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2$ étant convergente et chaque e_{ω_k} étant de norme 1 dans $\mathcal{B}$, la série de fonctions $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e_{\omega_k}$ converge normalement.
– De plus, pour tout réel τ,

$$\begin{aligned}
|\gamma_x(\tau) - \gamma_{S_n}(\tau)| &= |M\big(xx_\tau^* - S_n(S_n)_\tau^*\big)| \\
&= |M\big((x-S_n)x_\tau^*\big) + M\big(S_n(x_\tau^* - (S_n)_\tau^*\big)| \\
&\leqslant \sqrt{M\,|x-S_n|^2}\sqrt{M\,|x_\tau^*|^2} \ +\ \sqrt{M\,|S_n|^2}\sqrt{M\,|x_\tau^* - (S_n)_\tau^*|^2} \\
&\leqslant 2\sqrt{M\,|x-S_n|^2}\sqrt{M\,|x|^2}
\end{aligned}$$

(en utilisant les propriétés opératoires de M, ainsi que l'inégalité $M\,|S_n|^2 \leqslant M\,|x|^2$).
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M\,|x-S_n|^2 = 0$, on en déduit une majoration uniforme qui permet de conclure sur la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e_{\omega_k}$ vers γ_x.

E.1) Pour tout réel τ, l'application xx_τ^* est 1-périodique et dans $\mathcal{B}$, donc est moyennable d'après **I.C.1)** : x est donc stationnaire et de plus 1-périodique vu que $\forall \tau \in \mathbb{R},\ \ x_{\tau+1}^* = x_\tau^*$.

2) – Montrons pour commencer que l'application γ_x est continue, en la décomposant en série trigonométrique normalement convergente.
En notant $S_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e_{2k\pi}$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\, S_n - x\,\|_2 = 0$ par convergence en moyenne quadratique. Par suite, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\, S_n(x_\tau) - x_\tau\,\|_2 = 0$ étant donné que l'application $y \longmapsto y_\tau$ est une isométrie au sens de la norme $\|\,.\,\|_2$.
Par continuité du produit scalaire (ou par polarisation), il vient (pour τ fixé) $\lim\limits_{n\to+\infty} <S_n(x)\,|\,S_n(x_\tau)> = <x\,|\,x_\tau>$, ce qui établit la convergence simple de la suite $(\gamma_{S_n(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers γ_x.
Or, en reprenant les calculs du **III.D.1)**, $\gamma_{S_n(x)}(\tau) = \sum\limits_{k=-n}^{n} |a_k|^2 e^{2ik\pi\tau}$, d'où $\gamma_x(\tau) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2ik\pi\tau}$.
Ainsi, γ_x est bien somme d'une série trigonométrique normalement convergente et, en particulier, continue et égale à sa série de Fourier $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2ik\pi\tau}$.

– En utilisant **I.C.1)**, le k-ième coefficient de Fourier complexe de γ_x est alors donné par $c_k = \displaystyle\int_0^1 \gamma_x(\tau)e^{-2ik\pi\tau}\,\mathrm{d}\tau$.
La convergence normale établie précédemment implique facilement la convergence uniforme de la suite $(\gamma_{S_n(x)}e_{-2ik\pi})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\gamma_x e_{-2ik\pi}$ sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, $c_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \gamma_{S_n(x)}(\tau)e^{-2ik\pi\tau}\,\mathrm{d}\tau$.

Comme cette dernière intégrale vaut $|a_k|^2$ pour $n \geqslant |k|$ (en utilisant encore I.C.2)), on peut alors conclure sur l'égalité $c_k = |a_k|^2$.

Remarque : Si l'auteur du problème avait eu la conscience professionnelle de faire un corrigé de son propre sujet, il se serait rendu compte que cette question nécessitait des résultats intermédiaires qui auraient au moins dû faire l'objet d'indications.

F.1) Comme $\forall k \in \mathbb{Z},\ a+k \neq 0$,

$$a_k = \int_0^1 e^{-2i\pi a t} e^{-2i\pi k t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{i}{2\pi(a+k)} e^{-2i\pi(a+k)t}\Big]_0^1 = \frac{i(e^{-2i\pi a}-1)}{2\pi(a+k)}.$$

De plus, la formule de Parseval (dans le cadre des séries de Fourier habituelles de fréquences entières) appliquée à la fonction 1-périodique continue par morceaux x_1 s'écrit :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \int_0^1 |x_1(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1.$$

2) Pour $\tau \in [0,1[$, $\gamma_{x_1}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau e^{-2i\pi a t} e^{2i\pi a(t-\tau+1)}\,\mathrm{d}t + \int_\tau^1 e^{-2i\pi a t} e^{2i\pi a(t-\tau)}\,\mathrm{d}t = \tau e^{2i\pi a(1-\tau)} + (1-\tau)e^{-2i\pi a\tau}$.
Il en résulte que γ_{x_1} est continue sur $[0,1[$ et que $\displaystyle\lim_{\tau\to 1^-} \gamma_{x_1}(\tau) = 1 = \gamma_{x_1}(0)$.
Par 1-périodicité, γ_{x_1} est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3) Pour finir, on remarque que, γ_{x_1} étant continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet (adapté aux fonctions 1-périodiques) montre que γ_{x_1} est limite simple de sa série de Fourier, ce qui donne au point $\dfrac{1}{2}$:

$$\gamma_{x_1}(\frac{1}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k |a_k|^2,$$

d'où, comme $\gamma_{x_1}(\dfrac{1}{2}) = \cos\pi a$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{\pi^2(a+k)^2} = \frac{4\cos\pi a}{|e^{-2i\pi a}-1|^2} = \frac{\cos\pi a}{\sin^2\pi a}.$$