A. Norme d'un opérateur d'une matrice

1) $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, il suffit donc de montrer que S^{n-1} est un fermé borné.

L'application $\varphi,\quad x \longmapsto \|x\|$ est 1 lipchitzienne, donc continue, et $S^{n-1} = \varphi^{-1}(]-\infty, 1])$ est un fermé, $\forall x \in S^{n-1},\quad \|x\| \leq 1$, donc S^{n-1} est borné.

L'application $\varphi,\quad x = {}^t(x_1, ..., x_n) \longmapsto \|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ comme composée d'une fonction polynômiale et de la fonction $\sqrt{.}$ qui sont continues, φ est alors continue. Comme $\{\|Mx\|,\quad x \in S^{n-1}\} = \varphi(S^{n-1})$ qui est l'image directe d'un compacte par une application continue, donc $\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\}$ est un compacte de $\mathbb{R}$, alors :
$\max\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\}$ existe, on note ce nombre $\|M\|_{op}$.

2) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
Si $\|M\|_{op} = 0$, alors $\forall x \in S^{n-1}$; $\|Mx\| = 0$, alors $Mx = 0$ car $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$, alors si $x \neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, alors $M\dfrac{x}{\|x\|} = 0$, M est linéaire donc $Mx = 0$, et $M0 = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Mx = 0$, c'est à dire $M = 0$.
$\|\lambda M\|_{op} = \max\{\|\lambda Mx\|,\ x \in S^{n-1}\} = |\lambda| \max\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\} = |\lambda|\, \|M\|_{op}$.
Soit $x \in S^{n-1}$, $\|(M+N)x\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$, alors :
$\|M+N\|_{op} = \max\{\|(M+N)x\|,\ \ x \in S^{n-1}\} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$
Pour $x \neq y \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{x-y}{\left\|x-y\right\|} \in S^{n-1}$, donc $\left\|M\dfrac{x-y}{\left\|x-y\right\|}\right\| \leq \|M\|_{op}$, alors $\left\|Mx - My\right\| \leq \|M\|_{op}\left\|x-y\right\|$, égalité évidente pour $x = y$.

3) M est symétrique réelle donc il existe une base $\mathcal{B}(v_1, ..., v_n)$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M, et soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in S^{n-1}$, alors $Mx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_i v_i$, par conséquent si on pose $\lambda = \max\{|\lambda_i|,\ 1 \leq i \leq n\}$, on a :

$\|Mx\| = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\lambda_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2\alpha_i^2} \leq \lambda\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$

Mais $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2} = 1$, donc, $\|Mx\| \leq \lambda$

D'autre part, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $\|Mx_0\| = \lambda$, alors :

$\|Mx\| \leq \lambda = \|Mx_0\| \leq \max\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\} = \|M\|_{op}$. d'où

$\max\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\} \leq \lambda \leq \max\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\}$, alors l'égalité.

4) Le rang de J est 1,donc 0 est une valeur propre de J de multiplicité au moins $n-1$, or sa trace est n, donc 0 est valeur propre de J et l'espace propre associé est de dimension $n-1$ qui est l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$, et n est la 2 ème valeur propre de J et l'espace propre associé est de dimension 1 qui est $Vect(1, \ldots, 1)$.

J est symétrique réelle, par application de la question précédente :

$\|M\|_{op} = n$ la plus grande valeur propre en valeur absolue.

5) On a $\forall x \in S^{n-1}$, $\|Mx\| \leq \|M\|_{op}$, pour $x = {}^t(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ le 1 dans la j ème place, alors $\|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (M_{i,j})^2} \geq |M_{i,j}|$ pour rout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Alors $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $|M_{i,j}| \leq \|M\|_{op}$, donc :

$$\max\{|M_{i,j}|,\ 1 \leq i, j \leq n\} \leq \|M\|_{op}$$

6) Soient $x\ {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$, alors :

$$\begin{aligned}
\|Mx\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j \right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} \quad \text{Inégalité de Cauchy chwartz} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} \quad \text{car } x \in S^{n-1}
\end{aligned}$$

Si l'inégalité précédente est une égalité alors l'inégalité de Cauchy est une égalité donc ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et ${}^t(M_{i,1}, \ldots, M_{i,n})$ sont liés pour tout $1 \leq i \leq n$. alors le rang de M est inférieur ou égal à 1.

Réciproquement :

Cas1) : si rang$M = 0$, alors $M = 0$ est l'égalité est vrai,

Cas2) : si le rang de M est 1, alors $\exists\ {}^t(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ vecteur non nul et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $(\ell_1 \lambda_i, \ldots, \ell_n \lambda_i)$ représente la i ème ligne de M, alors pour ${}^t(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$

Donc $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \sum_{i=1}^{n} \ell_i^2}$, mais pour $x = \frac{\ell}{\|\ell\|}$, on a :

$\|Mx\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \ell_i x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \sum_{i=1}^{n} \ell_i^2}$ et $\|Mx\| \leq \|M\|_{op}$.

Donc $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \sum_{i=1}^{n} \ell_i^2} \leq \|M\|_{op}$, cqfd

7) Soit $M \in \Sigma_n$.

De la question 6) on a $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2} \leq \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} 1} = n$.

Supposons que $\|M\|_{op} = n$, alors $\|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2}$, d'après toujours la question 6) le rang de M est inférieur ou égal à 1, de plus si on suppose $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$ tel que $|M_{i,j}| < 1$, alors, $\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2} < n$ ce qui est absurde, alors : $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $|M_{i,j}| = 1$, et rang$M = 1$.

Réciproquement si $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$; $|M_{i,j}| = 1$, et le rang de M est 1 on a bien pour tout $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$, $\|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j\right)^2}$.

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}{}^t(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in S^{n-1}$ où $\varepsilon_i =$ le signe de $M_{1,i}$, donc $(\sum_{j=1}^{n} M_{1,j} x_j)^2 = \frac{n^2}{n}$, or le rang de M est 1 donc toutes ses lignes sont à un signe prés de la première donc le nombre $(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j)^2$ est constant pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, alors $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j\right)^2} = n$.

Donc $\|M\|_{op} \leq n = \|Mx\| \leq \|M\|_{op}$, alors $\|M\|_{op} = n$.

D'où l'équivalence suivante Pour $M \in \Sigma_n$:

$\|M\|_{op} = n \Longleftrightarrow \forall i, j \in \{1, .., n\}, |M_{i,j}| = 1, \quad$ et le rang de M est 1 .

Pour construire ce genre de matrices, il suffit de choisir la première ligne avec des 1 ou des (-1) il y'a donc 2^n méthodes, et pour choisir ses lignes restantes qui sont à signes prés de la première ligne, donc il y'a 2^{n-1} méthodes pour le faire, alors pour choisir toute la matrice par le principe des Bergers il y'a $(2^n.2^{n-1}) = 2^{2n-1}$ méthodes.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Soit $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{(t^2/2)^n}{(2n)!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{2^n}{(n+1)(n+2)....(2n)} \leq 1$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{(t^2/2)^n}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \cosh(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$

9) $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2} \in [-1,1]$ et $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$, de plus $\frac{1+x}{2} t + \frac{1-x}{2}(-t) = tx$, l'application exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

10) On $|X| \leq 1$ et $E(X) = 0$. De 9) on a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
E(\exp(tX)) &\leq E\left[\frac{1+X}{2}\exp(t) + \frac{1-X}{2}\exp(-t)\right] \\
&\leq \frac{1+E(X)}{2}\exp(t) + \frac{1-E(X)}{2}\exp(-t) \text{ car } E \text{ est linéaire} \\
&\leq \frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) \text{ car } E(X) = 0 \\
&\leq \cosh(t) \\
&\leq e^{\frac{t^2}{2}} \text{ d'après } Q8)
\end{aligned}$$

Donc X est 1-sous gaussienne.

On suppose que $\frac{|X|}{\alpha} \leq 1$, alors $\forall u \in \mathbb{R}$, $E(\exp(u\frac{X}{\alpha})) \leq \exp(\frac{u^2}{2})$, alors pour $u = t\alpha$, on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(tX) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2})$. cqfd

11) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
E(\exp(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i)) &= E\left(\prod_{i=1}^{n}\exp(t\mu_i X_i)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n} E\big(\exp(t\mu_i X_i)\big) \text{ par indépendance des } X_i\\
&\leq \prod_{i=1}^{n}\exp(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2})\\
&\leq \exp(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2})\\
&\leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}) \text{ car } \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 = 1
\end{aligned}$$

Cqfd.

12) Soit $(x_i)_{i\in I}$ les valeurs possibles de X avec I dénombrable. Alors : $E(\exp tX) = \sum_{i\in I}\exp tx_i P(X = x_i)$

Soit $\lambda > 0$, posons $J = \{i \in I / x_i \geq \lambda\}$ et soit $i \in J$ et $t > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
tx_i \geq \lambda t &\implies \exp tx_i \geq \exp \lambda t\\
&\implies \sum_{i\in J} e^{tx_i}P(X = x_i) \geq \sum_{i\in J} P(X = x_i)\exp\lambda t\\
&\implies E(\exp tX) \geq \sum_{i\in J}\exp(tx_i)P(X = x_i) \geq P(\bigcup_{i\in J} X = x_i)\exp(\lambda t)\\
&\implies E(\exp tX) \geq P(X \geq \lambda)\exp\lambda t
\end{aligned}$$

Alors $P(X \geq \lambda) \leq E(\exp tX)\exp -\lambda t \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t)$.

Remarque : On peut le faire directement, par application de l'inégalité de Markov,

Pour tout $t > 0$:

$P(X \geq \lambda) = P(\exp tX \geq \exp t\lambda) \leq \frac{E(\exp tX)}{\exp t\lambda} \leq \frac{\exp \frac{\alpha^2 t^2}{2}}{\exp t\lambda} \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda)$

On a $P(|X| \geq \lambda) = P(-X \geq \lambda) + P(X \geq \lambda)$ par incompatibilité.

Mais d'après la question 11) $-X$ est aussi α-sous gaussienne.

Donc $P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp^{(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t)}$ et ceci pour tout $t > 0$, par conséquent $P(|X| \geq \lambda) \leq \inf_{t>0} 2\exp^{(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t)}$

Une étude très simple à la fonction $t \to (\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t)$ donne inf est atteint en $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$. Alors $P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}$.

13) On a $[X] \leq X < [X]+1$.

Supposons que $E(X)$ est fini alors $E([X])$ est fini car $[X] \leq X$ et $[X]$ est à valeurs positives de plus $E([X]) \leq E(X)$.

Supposons que $E([X])$ est fini, alors $E(X)$ est fini car $X < [X]+1$ et X est à valeurs positives.

On a $\forall k \in \mathbb{N}, \quad ([X] \geq k) = (X \geq k)$, et puisque $[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$. les inégalités $[X] \leq X < [X]+1$ donne $E([X]) \leq E(X) < E([X])+1$.

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

14) On a

$$\begin{aligned}
\exp(\frac{\beta X^2}{2} \geq k) &\iff \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln k \\
&\iff X^2 \geq \frac{2\ln k}{\beta^2} \\
&\iff |X| \geq \frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}
\end{aligned}$$

Donc $P(\exp(\frac{\beta X^2}{2} \geq k)) = P(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}) \leq 2\exp(\frac{-2\ln k}{2(\alpha\beta)^2}) = 2k^{-\eta}$ par application de 12)

Si $\alpha\beta < 1$, alors $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\eta}$ est convergente. donc la série : $\sum_{k\geq 1} P(\exp\frac{\beta^2 X^2}{2} \geq k)$ converge .

De la question 13) $E(\exp\frac{\beta^2 X^2}{2} \geq k)$ existe et $E(\exp\frac{\beta X^2}{2} \geq k) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\eta} = 1 + 2\zeta(\eta)$.

C. Recouvrements de la sphère

15) On raisonne par l'absurde. Soit $a_0 \in K$, on a K n'est pas inclus la partie finie $B_{a_0,\frac{\varepsilon}{2}}$, soit $a_1 \in K - B_{a_0,\frac{\varepsilon}{2}}$, alors K n'est pas inclus la partie finie $B_{a_0,\frac{\varepsilon}{2}} \bigcup B_{a_1,\frac{\varepsilon}{2}}$, il existe $a_2 \in K - B_{a_0,\frac{\varepsilon}{2}} \bigcup B_{a_1,\frac{\varepsilon}{2}}$, et ainsi de suite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_n \in K - \bigcup_{0\leq k\leq n-1} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact K, donc d'après Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$.

D'autre part de la définition de $(a_n)_n$, on a $\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \left\|a_i - a_j\right\| > \dfrac{\varepsilon}{2}$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\right\| > \dfrac{\varepsilon}{2}$, en tendant n vers l'infini on obtient $\|\ell - \ell\| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde.

16) Supposons que Λ est infini soit donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}} \subset K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$, $a_n \neq a_m$, donc $\|a_n - a_m\| > \varepsilon$.

K est un compact il existe une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\right\| > \varepsilon$ car φ est strictement croissante, en tendant n vers l'infini on obtient $\|\ell - \ell\| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde.

Λ est donc fini posons, $\Lambda = \{b_1, ..., b_r\} \subset K \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

$\forall j \in \{1, ..., r\}$, $\exists\, a_j \in A$ tel que $b_j \in B_{a_j,\frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\mathbf{Card}\Lambda \leq \mathbf{Card}A$.

On suppose que $\mathbf{Card}\Lambda = \mathbf{Card}A$ et que $K \not\subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$, il existe donc $b \in K$ et $b \notin \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$, alors $\forall a \in \Lambda, \quad \|b - a\| > \varepsilon$, en posant $\Lambda' = \Lambda \bigcup \{b\}$ de cardinal $1 + \mathbf{Card}A$ et il vérifie $\forall x, y \in \Lambda', \ \left\|x - y\right\| > \varepsilon$, ceci contredit la maximalité de $\mathbf{Card}\Lambda$, alors

$$K \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$$

17) Ici $\Lambda \subset S^{n-1}$ telle que $\forall x \neq y \in \Lambda, \left\|x - y\right\| > \varepsilon$.

Soit $x \in B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\|x - a\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, Donc $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$

Soient $a, b \in \Lambda$, alors $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \bigcap B_{b,\frac{\varepsilon}{2}} = \emptyset$, en effet : si x est un élément commun alors $\|x - a\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\|x - b\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $\|a - b\| \leq \|a - x\| + \|x - b\| \leq \varepsilon$, ce qui est en contradictoire avec $\|a - b\| > \varepsilon$.

Puisque $\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$ et ce sont des compactes, alors $\mu(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}) \leq \mu(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}})$, alors $\sum_{a\in\Lambda} \mu(B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}) \leq \mu(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}})$ par conséquent $\mathbf{Card}\Lambda(\dfrac{\varepsilon}{2})^n \leq (1 + \dfrac{\varepsilon}{2})^n$, alors $\mathbf{Card}\Lambda \leq \left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, de la question 16) il existe una partie fini $\Lambda_n \subset S^{n-1}$ telle que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$.

Par application de la question 17) avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, alors $\mathbf{Card}\Lambda_n \leq \left(\dfrac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n$

par conséquent $\mathbf{Card}\Lambda_n \leq 5^n$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19) On a pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} M^n_{i,j} x_j$, or $x \in S^{n-1}$, donc $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, et par application de la question 11), la variable aléatoire y_i est α-sous gaussienne, alors :

$$\begin{aligned}
E\Big(\exp(\gamma \left\|y\right\|^2)\Big) &= E\left(\exp(\sum_{i=1}^{n} \gamma y_i^2)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E\big(\exp(\gamma y_i^2)\big) \text{ par indépendance des } y_i \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} 5 \text{ par application de l'inégalité d'Orlicz} \\
&\leq 5^n
\end{aligned}$$

On a par application de l'inégalité de Markov :

$$P(\left\|y\right\| \geq r\sqrt{n}) = P(\exp^{\gamma\|y\|^2} \geq \exp^{\gamma r^2 n}) \leq \frac{E\Big(\exp^{\gamma\|y\|^2}\Big)}{\exp^{\gamma r^2 n}} \leq \Big(5\exp^{-\gamma r^2}\Big)^n.$$

20) Montrons $\forall a \in \Lambda_n$, $((\left\|M^n\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} (\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n}))$.

Supposons que $\forall a \in \Lambda_n$, $\left\|M^n a\right\| < r\sqrt{n}$.
Pour $x \in S^{n-1}$, $\exists a \in \Lambda_n$; tel que $x \in B_{a,\frac{1}{2}}$, car $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$, donc $\|x-a\| \leq \frac{1}{2}$, ainsi :

$$\begin{aligned}
\left\|M^n x\right\| &\leq \left\|M^n x - M^n a\right\| + \left\|M^n a\right\| \\
&\leq \left\|M^n\right\|_{op} \|x-a\| + \left\|M^n a\right\|, \text{ L'utilisation de la question1)} \\
&< \frac{1}{2}\left\|M^n\right\|_{op} + r\sqrt{n} \text{ cette dernière inégalité est stricte}
\end{aligned}$$

Donc $\left\|M^n\right\|_{op} < 2r\sqrt{n}$, donc tout élément qui n'appartient au 2ème événement n'appartient pas aussi au 1 er événement, d'où l'inclusion demandée. On a alors $(\left\|M^n\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} (\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n})$

Alors $P\Big((\left\|M^n\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n})\Big) \leq P\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n} (\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n})\right)$

Or $P\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n}(\left\|M^{(n)}a\right\|\geq r\sqrt{n})\right)\leq\sum_{a\in\Lambda_n}P\left((\left\|M^{(n)}a\right\|\geq r\sqrt{n})\right)\leq\mathbf{Card}\Lambda_n(5e^{-\gamma r^2})^n\leq$ $(25e^{-\gamma r^2})^n$

On a utiliser le fait que $\mathbf{Card}\Lambda_n\leq 5^n$ et la question 19) avec $y=M^na$ et $P(A\bigcup B)\leq P(A)+P(B)$ inégalité valable aussi pour un nombre fini d'événement.

Donc $P\left(\left\|M^n\right\|_{op}\geq 2r\sqrt{n}\right)\leq(25e^{-\gamma r^2})^n$.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@yahoo.fr