

CCINP 2024 MP Mathématiques 2

Proposition de corrigé

Exercice 1

Q1. On peut commencer par le calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 0 \\ X+2 & X-4 & X+2 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{lin. } C_1, C_3}{=} (X+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-1)$$

On constate que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-2, 1\}$; la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang égal à 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre associé à la valeur propre double -2 est de dimension égale à 2; l'autre valeur propre, 1, est simple. On peut donc conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On calcule pour $\lambda \in \{-2, 1\}$ le sous-espace propre $\text{Sep}_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ , et on exprime chacun comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre :

$$\text{Sep}_{-2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad \text{Sep}_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice A , donc $P^{-1}AP = D$ où $D = \text{Diag}(-2, -2, 1)$.

Q2. D'après la relation de récurrence de l'énoncé, la suite matricielle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées de la suite vectorielle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elles convergent simultanément si et seulement si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa topologie naturelle.

De même, les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente; on vient d'établir que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante donc convergente, et que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques de raison -2 , de valeur absolue strictement plus grande que 1, donc ces deux suites convergent si et seulement si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Les endomorphismes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux matrices P et P^{-1} sont des applications continues pour la topologie naturelle de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, réciproques l'une de l'autre, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = PY_n$ et $Y_n = P^{-1}X_n$; par conséquent, les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature.

On conclut que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et dans ce cas la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, donc la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (PY_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante aussi :

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si elles sont constantes et $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1).

Exercice 2

Q3. L'image de 1 par la permutation représentée par \mathbf{s} est l'élément d'indice 1 de la liste \mathbf{s} , auquel on peut accéder au moyen de l'expression `s[1]`

La transposition $(2\ 3) \in S_4$ est représentée par la liste `[0, 1, 3, 2]`

Q4. Par définition, l'image d'un élément i de l'ensemble de définition de σ_2 par la permutation composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est $\sigma_1(\sigma_2(i))$.

```

1 def comp(s1, s2):
2     # on suppose que les listes s1 et s2 sont de même longueur
3     n = len(s2)      # ordre du groupe symétrique
4     s = [s1[s2[i]] for i in range(n)]
5     return s

```

Q5. La réciproque τ d'une permutation $\sigma \in S_n$ est caractérisée par l'identité suivante : pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\tau(\sigma(i)) = i$.

```

1 def inv(s):
2     n = len(s)      # degré du groupe symétrique
3     t = [0] * n     # initialisation de la liste représentant la réciproque
4     for i in range(n):
5         t[s[i]] = i
6     return t

```

Q6. Un sous-ensemble G de S_n est un sous-groupe de S_n si et seulement si $G \neq \emptyset$ et, pour tout couple (σ, τ) d'éléments de G , $\sigma \circ \tau^{-1}$ appartient à G aussi.

```

1 def groupe(G):
2     if len(G) == 0:
3         return False
4     else:
5         for s in G:
6             for t in G:
7                 if comp(s, inv(t)) not in G:
8                     return False      # paresseux: interrompt la vérification
9     return True

```

Remarque : G étant fini, il suffirait de tester que G est non vide et stable par composition.

Q7. S_n est un groupe fini, toute permutation $\sigma \in S_n$ est un élément d'ordre ω fini ; le sous-groupe engendré par σ est formé des itérés σ^k pour $k \in \llbracket 0, \omega - 1 \rrbracket$, qui sont deux à deux distincts, et $\sigma^\omega = \sigma^0 = \text{id}$. On peut donc générer l'un après l'autre les itérés de σ à partir de $\sigma^1 = \sigma$ et arrêter le processus quand on retrouve la permutation identité, déjà insérée dans le sous-groupe engendré.

```

1 def cyclique(s):
2     G = [list(range(len(s)))] # liste des itérés de s (G[0] est l'identité)
3     sk = s                    # parcourt les itérés s**k pour k entier >0
4     while sk != G[0]:
5         G.append(sk)
6         sk = comp(sk, s)
7     return G

```

Problème

Q8. Tout d'abord, la matrice A est symétrique réelle.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; on a

$$X^T A X = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$$

Or x_1 et $x_1 + x_2$ sont des réels, leurs carrés sont des réels positifs donc $X^T A X \geq 0$; de plus, l'égalité $X^T A X = 0$ entraîne $x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = 0$ donc $x_1 = 0$ puis $x_2 = 0$. Par contraposée, si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^T A X > 0$; par définition, A est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Il s'agit de redémontrer l'équivalence suivante :

Une matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M : en prenant pour X un vecteur propre associé à λ , X est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $X^T M X > 0$ d'après la définition de la définie-positivité; d'autre part $X^T M X = X^T (\lambda X) = \lambda (X^T X)$ et $X^T X$ est égal au produit scalaire canonique (qui est défini positif) de X avec lui-même, donc $X^T X > 0$; on en déduit que $\lambda > 0$.

Supposons, réciproquement, que M est une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives. D'après le théorème spectral il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M , de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: en notant (x_1, \dots, x_n) le n -uplet de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} , on a

$$X^T M X = \left(\sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \right)^T M \left(\sum_{j=1}^n x_j \epsilon_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \underbrace{(\epsilon_i^T M \epsilon_j)}_{=\lambda_j \epsilon_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j \underbrace{(\epsilon_i^T \epsilon_j)}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le terme $\lambda_i x_i^2$ est un réel positif, donc la somme $X^T M X$ est positive; de plus, si cette somme est nulle alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\lambda_i x_i^2 = 0$, donc $x_i = 0$ puisque $\lambda_i > 0$, donc le vecteur X est nul. Ainsi pour tout vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le réel $X^T M X$ est strictement positif : on conclut que M est une matrice symétrique définie positive.

Q10. On étudie grossièrement la fonction polynomiale associée à P , qui est une fonction réelle continue sur \mathbb{R} ; en évaluant P en 0, en les racines de $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X-1)(X-3)$ et en considérant la limite de P en $+\infty$ on constate que

$$P(0) = -3 < 0, \quad P(1) = 1 > 0, \quad P(3) = -3 < 0, \quad P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'image de chacun des intervalles $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $]3, +\infty[$ est un intervalle contenant 0, donc P s'annule au moins une fois sur chaque intervalle ouvert $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Comme P est de degré 3, on conclut que P admet exactement trois racines réelles distinctes α, β, γ telles que

$$0 < \alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$$

en particulier, toutes les racines de P sont strictement positives.

La matrice B est symétrique réelle; on calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3) - (X-2) - (X-1) = P(X)$$

Ainsi les valeurs propres de B , qui sont les racines α, β, γ de P , sont toutes strictement positives : d'après la caractérisation spectrale rappelée à la **question Q9.**, B est une matrice symétrique définie positive.

On peut aussi commencer par observer que $P = \chi_B$; B est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (théorème spectral), donc $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On vérifie ensuite que les racines de P' ne sont pas des racines de P , donc toute racine de P est simple : P possède trois racines réelles simples distinctes. Enfin, pour tout réel $x \leq 0$ on a $P(x) < 0$ en tant que somme de réels négatifs et d'un réel strictement négatif; ainsi toute racine de P , donc toute valeur propre de B , est strictement positive, et on conclut que la matrice symétrique B est définie positive à l'aide de la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Q11. Soit M une matrice symétrique définie positive, d'ordre $n \geq 1$. D'après le théorème spectral M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc sa trace et son déterminant sont respectivement égaux à la somme et au produit de ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité; il s'agit d'une famille non vide vu que $n \geq 1$); comme les valeurs propres sont des réels strictement positifs, il en résulte que $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$. D'après le théorème spectral M possède deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 (non nécessairement distinctes); de la relation $\lambda_1 \lambda_2 = \det(M) > 0$ on déduit que λ_1 et λ_2 sont des réels non nuls de même signe, et de la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M) > 0$ on déduit que λ_1 et λ_2 sont strictement positifs. D'après la caractérisation spectrale rappelée à la **question Q9.**, M est définie positive.

*Remarque : ce critère est établi dans le cours sur l'optimisation au second ordre, dans le cas d'une fonction de deux variables, où l'on établit que la matrice hessienne en un point critique est définie positive si et seulement si (en notation de Monge) $rt - s^2 > 0$ et $r + t > 0$; la **question Q14.** donne un exemple d'application.*

Q13. Non le critère ne se généralise pas à des matrices symétriques réelles d'ordre $n > 2$; on peut considérer

par exemple la matrice diagonale $\text{Diag}(3, -I_2, I_{n-3})$ (explicitement pour $n = 3$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$), qui est

symétrique réelle, de trace égale à $n - 2 > 0$ et déterminant égal à $3 > 0$, mais qui possède des valeurs propres négatives, donc n'est pas définie positive d'après la caractérisation spectrale de la **question Q9.**

Q14. La fonction f est rationnelle donc de classe C^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$; ses dérivées partielles premières et secondes ont pour expressions : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 - \frac{1}{x^2 y}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 - \frac{1}{x y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2}{x^3 y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{x y^3}. \end{aligned}$$

Les éventuels points d'extremum local de f sont des points critiques; pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{x^2 y} = 1 \\ \frac{1}{x^2 y} = \frac{1}{x y^2} \end{cases} \iff x = y = 1$$

donc le seul point critique de f est $(1, 1)$. En ce point, la matrice hessienne de f est $Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; sa trace et son déterminant sont strictement positifs (respectivement égaux à 4 et 3), donc d'après le critère établi à la **question Q12.** $Hf(1, 1)$ est définie positive. Il en résulte que

f admet un minimum local (strict) en $(1, 1)$.

Il s'agit effectivement d'un point de minimum global : en utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique (ou la concavité du logarithme népérien), pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^)^2$ on a*

$$f(x, y) = 3 \frac{x + y + (xy)^{-1}}{3} \geq 3 \sqrt[3]{xy(xy)^{-1}} = 3 = f(1, 1).$$

Le critère de Sylvester

Q15. *Erreur d'énoncé : en général on ne peut pas imposer que X soit non nul si X_k est nul : par exemple si M est définie positive alors pour tout vecteur X non nul on a $X^\top M X > 0$ alors que $X_k^\top M_k X_k = 0$ lorsque $X_k = 0$.*

On peut effectuer des calculs par blocs. En posant $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on obtient

$$X^\top M X = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k + 0_{n-k,1} \\ * \end{pmatrix} = X_k^\top M_k X_k + 0$$

et le vecteur X est non nul si et seulement si X_k est non nul.

- Q16.** Soit M une matrice symétrique réelle définie positive et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On considère un vecteur non nul quelconque $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$: d'après la **question Q15.** il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$, et ce réel est strictement positif car M est définie positive ; il en résulte que M_k est définie positive, donc d'après la **question Q11.** on a $\det(M_k) > 0$. Ainsi M vérifie le critère de Sylvester.
- Q17.** La matrice M_{n-1} étant définie positive, son déterminant est strictement positif (**question Q11.**) donc elle est inversible, et l'équation $M_{n-1}V + U = 0$ admet comme solution $V = -M_{n-1}^{-1}U$. De plus, comme la matrice M_{n-1} est symétrique on a aussi

$$V^\top M_{n-1} + U^\top = V^\top M_{n-1}^\top + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0_{1,n-1}$$

À l'aide d'un calcul par blocs on obtient alors :

$$\begin{aligned} Q^\top M Q &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc en posant $\beta = U^\top V + \alpha$ on obtient la forme voulue : $Q^\top M Q = \text{Diag}(M_{n-1}, \beta)$.

Enfin, on compare les déterminants, en observant que $\det(Q) = \det(Q^\top) = 1$ (déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) :

$$\det(M_{n-1})\beta = \det(\text{Diag}(M_{n-1}, \beta)) = \det(Q^\top M Q) = \det(Q^\top) \det(M) \det(Q) = \det(M)$$

or $\det(M) > 0$ par hypothèse et $\det(M_{n-1}) > 0$, donc $\beta > 0$.

- Q18.** On considère le prédicat

$\mathcal{H}(n)$: si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester, alors M est définie positive.

Dire qu'une matrice $M = (m) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester signifie que $m > 0$, donc $(x)^\top M(x) = mx^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la matrice M est définie positive : la proposition $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{H}(n-1)$ pour un certain entier $n \geq 2$ et on considère une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester. Le déterminant de M est un mineur principal de M , donc $\det(M) > 0$; les autres mineurs principaux de M sont aussi les mineurs principaux de la sous-matrice M_{n-1} , qui est également symétrique ; par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n-1)$, la matrice M_{n-1} est définie positive. D'après la **question Q17.**, il existe une matrice Q inversible (en fait, triangulaire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1) et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top M Q = \text{Diag}(M_{n-1}, \beta)$. Étant donné $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on écrit $Q^{-1}X = \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$; on effectue un calcul par blocs :

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \left(Q \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \right)^\top M Q \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = (Y^\top \quad z) (Q^\top M Q) \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (Y^\top \quad z) \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = Y^\top M_{n-1} Y + \beta z^2 \end{aligned}$$

On a $\beta z^2 \geq 0$ et $Y^\top M_{n-1} Y \geq 0$ car M_{n-1} est définie positive, donc $X^\top M X \geq 0$; de plus, l'égalité $X^\top M X = 0$ entraîne $Y^\top M_{n-1} Y = 0$ et $\beta z^2 = 0$, donc $Y = 0$ et $z = 0$, et finalement $X = Q \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = 0$ aussi. On a donc établi que la matrice M est définie positive, et que $\mathcal{H}(n-1)$ implique $\mathcal{H}(n)$.

Par récurrence, on conclut que $\mathcal{H}(n)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit : toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

- Q19.** Pour tout réel x , la matrice $C(x)$ est symétrique réelle ; ses mineurs principaux sont, dans l'ordre : 2, 1 et

$$\det C(x) = 2 - 1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Les deux premiers sont strictement positifs pour tout x , donc d'après le critère de Sylvester la matrice $C(x)$ est définie positive si et seulement si $1 - 2x^2 > 0$, à savoir $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$

- Q20.** On constate que la matrice de l'énoncé est symétrique réelle. En calculant dans l'ordre ses mineurs principaux, on constate que le troisième est négatif :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 2 - 3 - 2 - 4 < 0$$

D'après la condition nécessaire du critère de Sylvester, la matrice n'est pas définie positive

Q21. La fonction $q : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$ est polynomiale de degré 2, on peut l'exprimer à l'aide de la formule de Taylor matricielle (le reste étant nul dans ce cas), par rapport à $(0, 0, 0)$: on a $q(0, 0, 0) = 0$, la matrice jacobienne de q en $(0, 0, 0)$ est nulle, donc en notant H la matrice hessienne de q en $(0, 0, 0)$ et X le vecteur colonne $(x \ y \ z)^\top$,

$$q(x, y, z) = \frac{1}{2} X^\top H X \quad \text{où} \quad H = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or les mineurs principaux de H valent dans l'ordre :

$$8, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

en particulier ils sont tous strictement positifs ; d'après le critère de Sylvester la matrice symétrique réelle H est définie positive, donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ le réel $X^\top H X$ est strictement positif, donc $q(x, y, z) > 0$.

Un raisonnement plus élémentaire consiste à décomposer l'expression en une somme de carrés, comme à la **question Q8.** : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = (x + y)^2 + \left(\frac{3}{2}x - z\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si les trois termes sont nuls, à savoir $x = 0$ (dernier terme) et $y = z = 0$.

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice S_n est symétrique réelle, et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ son $k^{\text{ème}}$ mineur principal est le déterminant de la matrice S_k ; d'après le critère de Sylvester, S_n est définie positive si et seulement si $\det(S_k) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On calcule directement ce déterminant pour $k \in \{1, 2\}$: $\det(S_1) = \sqrt{3} > 0$ et $\det(S_2) = 2 > 0$; on forme ensuite une relation de récurrence d'ordre 2 pour $k \geq 3$ en développant les déterminants selon une rangée :

$$\det(S_k) \stackrel{\text{dév. } C_k}{=} \sqrt{3} \det(S_{k-1}) - 1 \det \begin{pmatrix} S_{k-2} & * \\ 0_{1, k-2} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{dév. } L_{k-1}}{=} \sqrt{3} \det(S_{k-1}) - \det(S_{k-2})$$

On calcule alors (la résolution de cette relation de récurrence linéaire à coefficients constants est également possible mais non nécessaire) :

$$\det(S_3) = \sqrt{3} > 0, \quad \det(S_4) = 1 > 0, \quad \det(S_5) = 0$$

La matrice symétrique S_n est définie positive si et seulement si $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.