

Partie I

Pour tout nombre réel s , on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(\mathcal{E}_s)$ suivante :

$$(\mathcal{E}_s) \quad (1-x^2) y''(x) - 2(s+2) x y'(x) - 2(s+1) y(x) = 0$$

On note f_s la solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ qui vérifie les conditions initiales $f_s(0) = 0$ et $f'_s(0) = 1$.

I.1. Soit g_s la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.

I.1.1. On a f_s est de classe C^2 sur $] -1, 1[$, donc g_s est de classe C^2 sur $] -1, 1[$.

On a $\forall x \in] -1, 1[$, $g'_s(x) = f'_s(x) - f'_s(-x)$ et $g''_s(x) = f''_s(x) + f''_s(-x)$, et puisque f_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ alors

$$(1-x^2) g''_s(x) - 2(s+2) x g'_s(x) - 2(s+1) g_s(x) = [(1-x^2) f''_s(x) - 2(s+2) x f'_s(x) - 2(s+1) f_s(x)] \\ + [(1-(-x)^2) f''_s(-x) - 2(s+2) (-x) f'_s(-x) - 2(s+1) f_s(-x)] = 0.$$

Ainsi g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$.

I.1.2. On a $g_s(0) = 2f_s(0) = 0$ et $g'_s(0) = f'_s(0) - f'_s(0) = 0$.

g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ qui vérifie les conditions initiales $g_s(0) = 0$ et $g'_s(0) = 0$.

Or la fonction nulle est aussi solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ qui vérifie les mêmes conditions initiales. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $g_s = 0$.

Ainsi, $\forall x \in] -1, 1[$ $f_s(-x) = -f_s(x)$ et donc f_s est impaire.

I.2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et h_α la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $h_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$.

On a h_α est de classe C^2 sur $] -1, 1[$, $\forall x \in] -1, 1[$ $h'_\alpha(x) = -2\alpha x (1-x^2)^{\alpha-1}$ et

$h''_\alpha(x) = -2\alpha (1-x^2)^{\alpha-1} + 4\alpha (\alpha-1) x^2 (1-x^2)^{\alpha-2}$ donc

$$(1-x^2) h''_\alpha(x) - 2(s+2) x h'_\alpha(x) - 2(s+1) h_\alpha(x) = \\ [-2(\alpha+s+1) + (4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1))x^2] (1-x^2)^{\alpha-1}.$$

h_α est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[\iff \forall x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} & -2(\alpha+s+1) + (4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1))x^2 = 0 \\ \iff & -2(\alpha+s+1) = 0 \text{ et } 4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1) = 0 \\ \iff & \alpha = -(s+1). \end{aligned}$$

I.3. Soit u_s la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$.

I.3.1. On a u_s est de classe C^2 sur $] -1, 1[$, et

$\forall x \in] -1, 1[$ $u'_s(x) = -2(s+1) x (1-x^2)^s f_s(x) + (1-x^2)^{s+1} f'_s(x)$ et

$u''_s(x) = 2(s+1)(1-x^2)^{s-1}((1+2s)x^2 - 1)f_s(x) - 4(s+1)x(1-x^2)^s f'_s(x) + (1-x^2)^{s+1} f''_s(x)$.

Donc $\forall x \in] -1, 1[$, $(1-x^2) u''_s(x) + 2s x u'_s(x) = 0$.

Ainsi u'_s est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}'_s) \quad (1-x^2) y'(x) + 2s x y(x) = 0$$

I.3.2.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{E}'_s) \text{ sur }]-1, 1[&\iff \forall x \in]-1, 1[\quad y'(x) + \frac{2s}{1-x^2} y(x) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[\quad y(x) = \lambda(1-x^2)^s. \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $(\mathcal{E}'_s)$ sur $]-1, 1[$ sont les fonctions y_λ définies sur $]-1, 1[$ par

$$y_\lambda(x) = \lambda(1-x^2)^s, \lambda \in \mathbb{R}.$$

I.3.3. On a $u'_s(0) = f'_s(0) = 1$ et $u_s(0) = f_s(0) = 0$.

u'_s est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}'_s)$ donc d'après la question I.3.2, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1, 1[\quad u'_s(x) = \lambda(1-x^2)^s$.

De $u'_s(0) = 1$, on a $\lambda = 1$ et alors $\forall x \in]-1, 1[\quad u'_s(x) = (1-x^2)^s$.

Puisque $u_s(0) = 0$ alors $u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

I.4. Soit y une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I . On note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de y sur I .

I.4.1 On a y est la somme sur I d'une série entière, donc y est de classe C^2 sur I et

$$\forall x \in I, y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1}, \text{ donc}$$

$$(1-x^2)y''(x) - 2(s+2)xy'(x) - 2(s+1)y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)[(2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n]x^{2n+1}.$$

D'après l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur I , on a :

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)[(2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n]x^{2n+1} \iff$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n = 0.$$

Donc

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}_s) \text{ sur } I \iff \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n = 0$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} c_n$$

$$\text{I.4.2} \quad \text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{2s+2n+1}{2n+1} c_{n-1}.$$

Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n = \frac{(2s+3)(2s+5)\dots\dots\dots(2s+2n+1)}{3 \times 5 \times \dots\dots\dots \times (2n+1)} c_0 = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{2s+2k+1}{2k+1}$$

I.4.3 Supposons que $(\mathcal{E}_s)$ admet une solution polynômiale h impaire et non identiquement nulle sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Alors il existe $m \in \mathbb{N}$, $(c_n)_{0 \leq n \leq m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $h(x) = \sum_{n=0}^m c_n x^{2n+1}$.

Posons $\forall n \geq m+1, c_n = 0$.

On a $\forall x \in I, h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, donc h est développable en série entière sur I .

Ainsi, h est une fonction impaire, définie sur l'intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I , donc d'après les questions I.4.1 et I.4.2, et du fait que h est non identiquement nulle, on a $c_0 \neq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{2s+2k+1}{2k+1}.$$

Pour tout $n \geq m+1$, on a $c_n = 0$ alors $\prod_{k=1}^n (2s+2k+1) = 0$, donc il existe $k \in [[1, n]]$

tel que $s = -k - \frac{1}{2}$ par suite $s \in \left\{ -k - \frac{1}{2}, k \in [[1, n]] \right\} \subset \left\{ -k - \frac{3}{2}, k \in \mathbb{N} \right\}$.

Réciproquement, supposons que $s \in \left\{ -k - \frac{3}{2}, k \in \mathbb{N} \right\}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$

tel que $s = -m - \frac{3}{2}$.

Considérons la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $c_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = c_0 \prod_{k=1}^n \frac{2s+2k+1}{2k+1}$.

Puisque $2s+2m+3=0$ alors $\forall n \geq m+1$ on a $c_n = 0$.

Soit $y(x) = \sum_{n=0}^m c_n x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, on a y est une fonction polynômiale impaire,

non identiquement nulle et $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

D'après les questions I.4.1 et I.4.2, on a y est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$.

Ainsi $(\mathcal{E}_s)$ admet des solutions polynômiales impaires et non identiquement nulles si et seulement si $s \in \left\{ -k - \frac{3}{2}, k \in \mathbb{N} \right\}$.

I.4.4 On suppose que $s \notin \left\{ -n - \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ est une solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I et que $c_0 \neq 0$.

Alors d'après la question I.4.1, on a $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} c_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0$.

• Si $x = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^{2n+1}$ converge.

• Supposons $x \neq 0$, on applique la règle de D'Alembert, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{2n+3}}{c_n x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2s+2n+3}{2n+3} x^2 = x^2.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^{2n+1}$ est $R = 1$.

I.5. Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^{2n+1}$ où $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \prod_{k=1}^n \frac{2s+2k+1}{2k+1}$.

• Si $s \in \left\{ -n - \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ alors son rayon de convergence est $R = +\infty$.

• Si $s \notin \left\{ -n - \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ alors d'après la question I.4.4, son rayon de convergence

est $R = 1$.

Dans tous les cas $R \geq 1$.

Considérons la fonction y définie sur $] -1, 1[$ par $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$.

D'après les questions I.4.1 et I.4.2, on a y est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = c_0 = 1$.

D'autre part f_s est une solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, 1[$ qui vérifie $f_s(0) = 0$ et $f'_s(0) = 1$.

Donc d'après l'unicité assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[\quad f_s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) \right] x^{2n+1}. \end{aligned}$$

I.6. D'après la question I.3., pour $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$ on a trouvé que $u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

Donc $\forall x \in] -1, 1[$, $\int_0^x (1-t^2)^s dt = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, pour $s = -p - \frac{3}{2}$, on a $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{f_{-(p+\frac{3}{2})}(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}$.

D'après la question I.5 on a pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f_{-(p+\frac{3}{2})}(x) = x + \sum_{n=1}^p \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n 2(k-(p+1)) \right] x^{2n+1}$$

Posons $Q_p(x) = x + \sum_{n=1}^p \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n 2(k-(p+1)) \right] x^{2n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a Q_p est une fonction polynômiale impaire de degré $2p+1$ et

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

En particulier, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q_0(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{Q_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x - \frac{2}{3}x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Partie II

On considère la fonction β de la variable réelle x définie par :

$$\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt$$

II.1. la fonction $h_x : t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0, 1[$.

On a $(1-t^2)^x \underset{x \mapsto 1^-}{\sim} 2^x (1-t)^x$ et la fonction $t \mapsto (1-t)^x$ est intégrable sur $[0, 1[$ si et seulement si $x > -1$.

Donc h_x est intégrable sur $[0, 1[$ si et seulement si $x > -1$.

Ainsi le domaine de définition de β est $D_\beta =]-1, +\infty[$.

II.2. Considérons la fonction $h(x, t) = (1 - t^2)^x$ pour tout $(x, t) \in]-1, +\infty[\times [0, 1[$.

- On a h est continue sur $] - 1, +\infty[\times [0, 1[$.

- Soit $a \in]-1, +\infty[$.

$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, 1[\quad |h(x, t)| \leq (1 - t^2)^a \quad (\text{car } 1 - t^2 \in]0, 1[\text{ }),$

et la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^a$ est continue, positive et intégrable sur $[0, 1[$.

Donc d'après un théorème du cours β est continue sur $] - 1, +\infty[$.

On admettra que β est de classe C^1 sur $] - 1, +\infty[$ et $\forall x \in] - 1, +\infty[$

$$\beta'(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^x \ln(1 - t^2) dt$$

II.3. Soit $x \in] - 1, +\infty[$, on a $\forall t \in]0, 1[, \ln(1 - t^2) < 0$ et $(1 - t^2)^x > 0$
donc $(1 - t^2)^x \ln(1 - t^2) < 0$.

Comme β' est continue sur $] - 1, +\infty[$, alors $\forall x \in] - 1, +\infty[\quad \beta'(x) < 0$.

Ainsi β est strictement décroissante sur $] - 1, +\infty[$.

II.4.

II.4.1. Soit $x \in] - 1, +\infty[$, on a $\beta(x + 1) = \int_0^1 (1 - t^2)^{x+1} dt$.

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \beta(x + 1) &= [t(1 - t^2)^{x+1}]_0^1 + 2(x + 1) \int_0^1 t^2(1 - t^2)^x dt = 2(x + 1) \int_0^1 t^2(1 - t^2)^x dt \\ &= 2(x + 1) \int_0^1 (t^2 - 1)(1 - t^2)^x dt + 2(x + 1) \int_0^1 (1 - t^2)^x dt \\ &= -2(x + 1)\beta(x + 1) + 2(x + 1)\beta(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \beta(x + 1) = \frac{2x + 2}{2x + 3} \beta(x).$$

II.4.2. On a $\beta(0) = \int_0^1 dt = 1$.

D'après la question II.4.1 on a $\forall x \in] - 1, +\infty[\quad \beta(x) = \frac{2x + 3}{2x + 2} \beta(x + 1)$.

Comme β est continue en 0 alors $\lim_{x \rightarrow -1^+} \beta(x + 1) = \beta(0) = 1$

et donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 3}{2x + 2} \beta(x + 1) = +\infty$.

II.4.3. D'après la question II.4.1, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta(n) = \frac{2n}{2n + 1} \beta(n - 1)$.

Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta(n) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n + 1)!}$.

On a la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc

$$(2^n n!)^2 \sim (2^n)^2 (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad (2n + 1)! \sim \sqrt{2\pi(2n + 1)} \left(\frac{2n + 1}{e}\right)^{2n+1}.$$

Puisque $\left(\frac{2n}{2n + 1}\right)^{2n} \rightarrow \frac{1}{e}$, alors $\beta(n) \sim \frac{2n\pi}{(2n + 1)\sqrt{2\pi(2n + 1)}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(n) = 0$.

β est décroissante sur $] - 1, +\infty[$, donc $\forall x \in [2, +\infty[$ on a $\beta(E(x) + 1) \leq \beta(x) \leq \beta(E(x))$
(où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(E(x) + 1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(E(x)) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x) = 0$.

II.4.4. On a $\beta\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt = [\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.
(on peut aussi utiliser le changement de variable $t = \cos u$) .

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta\left(-\frac{1}{2} + n\right) = \frac{2n-1}{2n} \beta\left(-\frac{1}{2} + (n-1)\right)$.

On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta\left(-\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3}{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2} \beta\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Partie III

Soient $\gamma > 1$, $\gamma \notin \mathbb{N}$ et φ_γ la fonction 2π périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi_\gamma(x) = |\cos x|^\gamma$$

On note $a_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(\gamma) \cos nx + b_n(\gamma) \sin nx]$ la série de Fourier de φ_γ .

III.1.

III.1.1 On a φ_γ est continue, 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de Dirichlet φ_γ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.1.2 On a φ_γ est paire sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $b_n(\gamma) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } p \in \mathbb{N}, \text{ on a } a_{2p+1}(\gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\gamma(x) \cos(2p+1)x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi_\gamma(x) \cos(2p+1)x \, dx + \int_0^{\pi} \varphi_\gamma(x) \cos(2p+1)x \, dx \right] \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = x + \pi$, on a

$$\int_{-\pi}^0 \varphi_\gamma(x) \cos(2p+1)x \, dx = - \int_0^{\pi} \varphi_\gamma(u) \cos(2p+1)u \, du$$

donc $a_{2p+1}(\gamma) = 0$.

III.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \cos 2px \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{III.2.1 } \forall p \in \mathbb{N}, I_p - I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot (\cos 2px - \cos(2p+2)x) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \sin x \cdot \sin(2p+1)x \, dx. \end{aligned}$$

III.2.2 Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \sin x \cdot \sin(2p+1)x \, dx &= \\ \left[-\frac{1}{\gamma+1} \sin(2p+1)x \cdot \cos^{\gamma+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &+ \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma+1} x \cdot \cos(2p+1)x \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I_p - I_{p+1} = 2 \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \cos x \cdot \cos(2p+1)x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \text{III.2.3 } \text{On a } \forall p \in \mathbb{N}, I_p + I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot (\cos 2px + \cos(2p+2)x) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \cos x \cdot \cos(2p+1)x \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question III.2.2, on a $\forall p \in \mathbb{N}, I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1} (I_p + I_{p+1})$.

III.2.4 On fait le changement de variable $t = \sin u$, on a

$$\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x . dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^x . \cos u . du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2x+1} du$$

Donc $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma u . du = \beta(\gamma')$ où $\gamma' = \frac{\gamma-1}{2} > 0$.

III.2.5 En utilisant le résultat de la question III.2.3, on a $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad I_{p+1} = \frac{\gamma-2p}{\gamma+2(p+1)} I_p$.

Donc par récurrence, on montre que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \frac{\gamma(\gamma-2)\dots(\gamma-2(p-1))}{(\gamma+2)\dots(\gamma+2p)} . I_0$.

On a $I_0 = \beta(\gamma')$, donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \frac{\gamma}{\gamma+2p} . A_p(\gamma) . \beta(\gamma')$

où $A_p(\gamma) = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k}$.

III.3 On a $a_0(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x|^\gamma dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|^\gamma dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma dx \right]$.

On fait le changement de variable $u = \pi - x$, on a $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|^\gamma du$.

Donc $a_0(\gamma) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|^\gamma dx = \frac{4}{\pi} I_0 = \frac{4}{\pi} \beta(\gamma')$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p}(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x|^\gamma \cos 2px dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^\gamma \cos 2px dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma \cos 2px dx \right]$.

On fait le changement de variable $u = \pi - x$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma \cos 2px dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\pi - u)|^\gamma \cos 2p(\pi - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^\gamma \cos 2pu du.$$

Donc $a_{2p}(\gamma) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^\gamma \cos 2px dx = \frac{4}{\pi} I_p = \frac{4}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma+2p} . A_p(\gamma) . \beta(\gamma')$.