

Lionel Girard, Lycée Paul Éluard, 93 Saint-Denis
lionel.girard5@wanadoo.fr

E3A 2005, MP-B

Exercice 1.

1. L'application φ est clairement une forme symétrique (commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$), bilinéaire (structures d'algèbres de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P, P) = \sum_{i=1}^{n+1} P^2(x_i) \geq 0$ (φ est positive) et si $\varphi(P, P) = 0$, alors on a $P^2(x_i) = 0$ pour tout i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, donc P de $\mathbb{R}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, et nécessairement il est nul (φ est définie).

Finalement, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. a) Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\deg(P_k) = (n+1) - (k+1) + 1 = n - k + 1$, donc $\{\deg(P_k), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \llbracket 1, n \rrbracket$. Avec $\deg(P_{n+1}) = 0$, la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est échelonnée en degré dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc elle est libre de cardinal $n+1$, donc c'est une base de l'espace, de dimension $n+1$, $\mathbb{R}_n[X]$.

(liberté : si $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k P_k = 0$ avec $\{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\} \neq \emptyset$, alors si r est le minimum de cet ensemble, on a $\lambda_r P_r = -\sum_{k=r+1}^{n+1} \lambda_k P_k \in \mathbb{R}_{n-r}[X]$, ce qui est faux puisque $\deg(P_r) = n - r + 1$)

$\boxed{(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

- b) Pour tout (i, k) de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, on a $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque $i = k$ et 0 sinon.

Ainsi, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$,

$$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=1}^{n+1} L_i(x_k) L_j(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j},$$

ce qui signifie que $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est donc libre (famille orthogonale de vecteurs non nuls) et c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a

$$\varphi(P_i, L_i) = \sum_{k=1}^{n+1} P_i(x_k) L_i(x_k) = P_i(x_i) = \prod_{j=i+1}^{n+1} (x_j - x_i),$$

ce qui avec l'hypothèse $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ donne $\varphi(P_i, L_i) > 0$.

Les deux familles $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ et $(P_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ étant des bases de $\mathbb{R}_n[X]$, elles engendrent le même espace.

Pour tout i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(L_i, P) = P(x_i)$.

Pour $i \leq n$, la famille $(L_j)_{1 \leq j \leq i}$ engendre le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall l \geq i+1, P(x_l) = 0\}.$$

Or pour tout k de $\llbracket 1, i \rrbracket$, $P_k \in F_i$ car pour tout $l \geq k+1$, $P_k(x_l) = 0$, donc l'espace G_i engendré par la famille $(P_k)_{1 \leq k \leq i}$ est inclus dans F_i . Or les deux familles $(L_j)_{1 \leq j \leq i}$ et $(P_k)_{1 \leq k \leq i}$ sont libres et de même cardinal, donc $\dim F_i = \dim G_i$, c'est-à-dire $F_i = G_i$.

Finalement,

la famille orthonormée associée à $(P_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ est la famille $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$.

3. a) Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a

$$X^k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(X^k, L_i) L_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^k L_i.$$

b.i) On pose $Q(X) = \prod_{i=2}^{n+1} (X - x_i)$. On a $\deg(Q) = n$ et il existe un

$(a_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$. On a $a_n = 1$, donc en

notant C_j la j -ème colonne de la matrice dont il s'agit de calculer le déterminant, avec l'opération élémentaire $C_{n+1} \leftarrow \sum_{j=0}^n a_j \cdot C_{j+1}$, on

obtient, avec $\sum_{j=0}^n a_j x_i^j = Q(x_i) = 0$ pour tout i de $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & Q(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

et en développant suivant la dernière colonne,

$$\text{avec } (-1)^{1+(n+1)} Q(x_1) = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1), \text{ on obtient}$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{array} \right| = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{array} \right|.$$

b.ii) En poursuivant le calcul initialisé dans b.i) on a

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{array} \right| = \prod_{i=3}^{n+1} (x_i - x_2) \left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{array} \right|,$$

et par une récurrence d'écriture malaisée, entre autres à cause des notations de l'énoncé mais pas seulement, on obtient

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{array} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i),$$

c'est-à-dire en notant $\mathcal{B}' = (L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$,

$$[\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \dots, X^n)]^2 = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \right)^2.$$

c) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\det_{\mathcal{C}'}(1, X, \dots, X^n) = \det_{\mathcal{C}'}(C) \times \det_{\mathcal{C}}(1, X, \dots, X^n).$$

Si les deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthonormées, la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale et son déterminant est de valeur absolue égale à 1, c'est-à-dire : $|\det_{\mathcal{C}'}(1, X, \dots, X^n)| = |\det_{\mathcal{C}}(1, X, \dots, X^n)|$.

d) On note $X_i = X^{i-1}$ pour tout i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Le procédé de Schmidt associe à la base canonique $\mathcal{B}_c = (X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une base orthonormée $\mathcal{D} = (T_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ et si l'on note $T = [t_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n+1}$ la matrice de $\mathcal{B}_c$ dans $\mathcal{D}$, on a pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, $t_{i,j} = \varphi(X_j, T_i)$. Avec $\mathcal{D}$ orthonormée et $X_j \in \text{Vect}(T_1, \dots, T_j)$ par construction, on a $t_{i,j} = 0$ si $i \geq j+1$, c'est-à-dire que la matrice est triangulaire supérieure.

e) On a $[\det_{\mathcal{D}}(1, X, \dots, X^n)]^2 = \det(T)^2 = \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{i,i} \right)^2$, avec

$$t_{i,i}^2 \leq \varphi(X_i, X_i) \cdot \varphi(T_i, T_i), \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Pour tout p de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $\varphi(X_p, X_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}$ et pour tout i de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $\varphi(T_i, T_i) = 1$ puisque la base $\mathcal{D}$ est orthonormée, et finalement, avec le résultat de 3.c), en élevant au carré pour chasser la valeur absolue, on a

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \right)^2 \leq \prod_{p=0}^n \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p} \right).$$

Exercice 2.

1. a) Par récurrence sur n il existe une C_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$, avec $C_0 = 0$ (et pour $n = 1$ avec $C_1 = C$). Si c'est vrai au rang n , alors

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & A^n C + C_n B \\ 0 & B^{n+1} \end{pmatrix},$$

donc c'est vrai au rang $n+1$, avec $C_{n+1} = A^n C + C_n B$.

Alors, pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $p \geq 1$ de $\mathbb{C}[X]$, on a

$$P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix},$$

avec $D = \sum_{k=0}^p a_k C_k = \sum_{k=1}^p a_k C_k$.

b) Comme M est diagonalisable il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$ et avec le résultat précédent on a

$$P(A) = P(B) = 0.$$

c) Les deux matrices A et B admettent donc un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc, par théorème, elles sont diagonalisables.

2. a) On a

$$M N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & C B \\ 0 & B^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } N M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & A C \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}.$$

Avec l'hypothèse $A C = C B$, on en déduit $M N = N M$.

b) Considérons $E = \mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique et soit f et g les deux endomorphismes canoniquement associés à M et N (c'est-à-dire

déterminés par le fait que M est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et N la matrice de g dans la même base).

On a donc $f \circ g = g \circ f$ avec f et g diagonalisables : c'est vrai pour f car M est diagonalisable et c'est vrai pour g , car avec $P(A) = P(B) = 0$ on a $P(N) = 0$ pour le polynôme de la question 1.b) (il suffit de reprendre le résultat de 1.a avec $C = 0$, donc $C_k = 0$ pour tout k de $\mathbb{N}$) et donc N est diagonalisable.

Si $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ est le spectre de f (avec $i \neq j \implies \lambda_i \neq \lambda_j$), en posant $E_i = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{C}^n})$, on a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^k E_i$.

De plus, pour tout i de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a

$$(f - \lambda_i \text{Id}) \circ g = f \circ g - \lambda_i g = g \circ f - \lambda_i g = g(f - \lambda_i \text{Id}),$$

donc par théorème E_i est stable par g et l'endomorphisme g_i induit par g sur E_i est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres pour g et, comme éléments de E_i , propres pour f . Alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (car la somme est directe) constituée de vecteurs propres pour f et pour g .

Si on note R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique, c'est-à-dire R^{-1} la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, les deux matrices $R M R^{-1}$ et $R N R^{-1}$ sont les matrices respectives de f et g dans la base $\mathcal{B}$ donc sont diagonales, notées respectivement D et D' et on a finalement

$$M = R^{-1} D R \text{ et } N = R^{-1} D' R.$$

c) On a alors $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M - N = R^{-1} (D - D') R$, donc $M - N$ est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

3. La formule du déterminant par blocs donne

$$\chi_{M-N}(t) = \begin{vmatrix} -t I_n & C \\ 0 & -t I_n \end{vmatrix} = (-t)^{2n} = t^{2n}.$$

La seule valeur propre de $M - N$ est donc 0 et $M - N$ est semblable à la matrice nulle, donc est elle-même nulle, ce qui donne $C = 0$.

On obtient le résultat : si M est diagonalisable avec $A C = C B$, alors $C = 0$.

Exercice 3.

1. C'est du cours, il s'agit d'une parabole de foyer l'origine et d'axe focal (Ox).

Avec $r(-\theta) = r(\theta)$ on a la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (axe focal) et on peut se contenter de l'étude sur l'intervalle $]0, \pi]$.

On a $\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = +\infty$ et $r(\theta) \sin(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$, d'où $\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} r(\theta) \sin(\theta) =$

$+\infty$: la courbe admet une branche parabolique dans la direction des x positifs.

Enfin, avec $r'(\theta) = -\frac{\sin \theta}{(1-\cos \theta)^2}$, $r(\theta)$ décroît pour θ variant de 0 à π .

On a $r(\pi) = \frac{1}{2}$ et $r'(\pi) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = 1$, $r'(\frac{\pi}{2}) = -1$, ce qui permet un tracé précis en ces deux points.

Avec $r = 1 + r \cos \theta$ on obtient $r^2 = (1 + r \cos \theta)^2$ et une équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2, \text{ c'est-à-dire } y^2 = 2(x + \frac{1}{2}).$$

Le sommet est $S(-\frac{1}{2}, 0)$ et la directrice est la droite d'équation $x = -1$.

2. a) On a $M \left(\frac{\frac{\cos \theta}{1-\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}} \right)$, $K \left(\frac{\frac{\cos \theta}{1-\cos \theta}}{0} \right)$, et $N \left(\frac{\frac{2 \cos \theta}{1-\cos \theta}}{0} \right)$.

La droite (M, N) a pour équation $\begin{vmatrix} x - \frac{\cos \theta}{1-\cos \theta} & -\cos \theta \\ y - \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} & \sin \theta \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire : $x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos \theta}$.

Elle est de vecteur normal $\vec{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$ et il existe un λ de $\mathbb{R}$ tel que $\vec{OH} = \lambda \cdot \vec{n}$.

Avec $\lambda = \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos \theta}$, on obtient finalement $H \left(\frac{\frac{\sin(2\theta)}{1-\cos \theta} \sin \theta}{\frac{\sin(2\theta)}{1-\cos \theta} \cos \theta} \right)$.

b) Pour $\theta \notin 2\pi \mathbb{Z}$, on a $H = O \iff \sin(2\theta) = 0$, c'est-à-dire $\theta \in \frac{\pi}{2} \mathbb{Z}$.

Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2}, \pi [\cup] \pi, \frac{3\pi}{2} [\cup] \frac{3\pi}{2}, 2\pi [$, on obtient

$$OH = \frac{|\sin(2\theta)|}{1-\cos \theta}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\cos \varphi = \text{signe}[\sin(2\theta)] \times \sin \theta \text{ et } \sin \varphi = \text{signe}[\sin(2\theta)] \times \cos \theta}.$$

c) Pour $\theta \in U_1 =]0, \frac{\pi}{2} [\cup] \pi, \frac{3\pi}{2} [$, on a $\sin(2\theta) > 0$, donc $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ et une équation polaire pour cet ensemble est

$$r_1(\varphi) = OH = \frac{|\sin[2(\frac{\pi}{2}-\varphi)]|}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin \varphi}.$$

Pour $\theta \in U_2 =]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on a $\sin(2\theta) < 0$, donc $\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} - \theta$, c'est-à-dire $\theta = \frac{3\pi}{2} - \varphi$ et une équation polaire pour cet ensemble est $r_2(\varphi) = OH = \frac{|\sin[2(\frac{3\pi}{2} - \varphi)]|}{1 - \cos(\frac{3\pi}{2} - \varphi)} = \frac{-\sin(2\varphi)}{1 + \sin \varphi}$.

Avec $r_2(\varphi) = -r_1(\varphi + \pi)$, on peut prendre comme équation polaire pour tout φ de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $r(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1 - \sin \varphi}$, formule qui est évidemment valable pour $\varphi = 0 [2\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, pour $\varphi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \pi [2\pi]$ et pour $\varphi = \pi [2\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \frac{3\pi}{2} [2\pi]$

Finalement, $\mathcal{E}$ est d'équation polaire $r(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1 - \sin \varphi}$.

3. a) La fonction r est 2π -périodique et $r(\pi - \varphi) = -r(\varphi)$, donc la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie et on peut se contenter de l'étude sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Sur cet intervalle on a

$$\begin{aligned} r(\varphi) = 0 &\iff \varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, 0\} \\ r(\varphi) > 0 &\iff \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ r(\varphi) < 0 &\iff \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\end{aligned}$$

- c) On pose $u = \varphi - \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\varphi = u + \frac{\pi}{2}$ et $f(u) = r(\varphi)$. On a

$$f(u) = \frac{-\sin(2u)}{1 - \cos u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2u}{\frac{u^2}{2}} = -\frac{4}{u}.$$

On a donc $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} r(\varphi) = +\infty$.

$$\text{Alors } Y(u) = f(u) \sin u = \frac{-\sin(2u) \sin u}{1 - \cos u} = -\frac{[2u - \frac{(2u)^3}{6} + o(u^3)] [u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)]}{\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} + o(u^4)},$$

$$Y(u) = -\frac{u^2}{u^2} \frac{[2 - \frac{4u^2}{3} + o(u^2)] [1 - \frac{u^2}{6} + o(u^2)]}{\frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + o(u^2)} = -\frac{[2 - \frac{5u^2}{3} + o(u^2)]}{\frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + o(u^2)},$$

$$Y(u) = -4 \frac{[1 - \frac{5u^2}{6} + o(u^2)]}{1 - \frac{u^2}{12} + o(u^2)} = -4 [1 - \frac{5u^2}{6} + o(u^2)] [1 + \frac{u^2}{12} + o(u^2)],$$

$$Y(u) = -4 [1 - \frac{9u^2}{12} + o(u^2)] = -4 + 3u^2 + o(u^2).$$

On en déduit que dans le repère mobile $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ la droite d'équation $Y = -4$ est asymptote à $\mathcal{E}$ et que la courbe est localement au dessus de son asymptote, c'est-à-dire dans le repère d'origine :

la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à $\mathcal{E}$ et la courbe est localement à gauche de son asymptote.

- d) Les points stationnaires sont ceux qui vérifient $(r(\varphi), r'(\varphi)) = (0, 0)$.

Avec $r'(\varphi) = \frac{2 \cos(2\varphi)}{1 - \sin \varphi} + \frac{\sin(2\varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}$ on a $r'(0) = 2 \neq 0$, et $r'(-\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$: il n'y a pas de point stationnaire.

4. Avec Maple on obtient (on reconnaitra la parabole $\mathcal{P}$ et la courbe $\mathcal{E}$)

