I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

I.A - Généralités

I.A.1) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \mathrm{Det}(A)$.

I.A.2) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

– si et seulement si A possède 2 valeurs propres simples ou une valeur propre double λ_0 avec un sous espace propre de dimension 2,

– c'est à dire si et seulement si le discriminant de $\chi_A(\lambda)$ est non nul ou $A = \lambda_0 I_2$.

On a bien A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) \neq 0$ ou $A = \lambda_0 I_2$.

I.A.3) A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

– si et seulement si A possède 2 valeurs propres simples ou une valeur propre double λ_0 avec un sous espace propre de dimension 2,

– c'est à dire si et seulement si le discriminant de $\chi_A(\lambda)$ est strictement positif ou $A = \lambda_0 I_2$.

On a bien A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) > 0$ ou $A = \lambda_0 I_2$.

I.B - Applications

I.B.1) Classiquement $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

I.B.2) On a la suite (X_k) géométrique de raison A, donc $X_k = A^k X_0$ pour $k \in \mathbb{N}$.

I.B.3) $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ a 2 racines simples $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Pour déterminer P, il suffit de chercher une base de vecteurs propres.

$E_2 = \ker(A - 2I_2)$, ce qui revient au système $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

On a donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$E_3 = \ker(A - 3I_2)$, ce qui revient au système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

On a donc $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ce qui prouve que $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

I.B.4) On obtient facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

De même $A = PDP^{-1}$ qui donne pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Bien sûr $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

D'où $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2^k & 2\cdot 2^k \\ 3^k & -3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^k + 2\cdot 3^k & 2\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \\ -2^k + 3^k & 2\cdot 2^k - 3^k \end{pmatrix}$.

I.B.5) On obtient donc $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = A^k X_0 = \begin{pmatrix} -2^k + 2\cdot 3^k & 2\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \\ -2^k + 3^k & 2\cdot 2^k - 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \\ 3\cdot 2^k - 3^k \end{pmatrix}$.

Finalement, pour $k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_k = 3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \\ v_k = 3\cdot 2^k - 3^k \end{cases}$

II Réduction des matrices d'ordre 3 et 4

II.A - Le cas $n = 3$

II.A.1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

On écrit la division euclidienne de k par 3, $k = 3q + r$. Alors $J^k = J^{3q+r} = J^{3q}J^r = \left(J^3\right)^q J^r = J^r$.

– Si k est un multiple de 3, $J^k = I_3$
– Si k est un multiple de 3 plus 1, $J^k = J$
– Si k est un multiple de 3 plus 2, $J^k = J^2$

II.A.2) $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

II.A.3) $\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1$.

J a donc trois valeurs propres simples $\left(1, j, j^2\right)$, en remarquant que $j^2 = \bar{j}$.
J est donc diagonalisable.

II.A.4) On cherche donc une base de vecteurs propres pour obtenir la matrice de passage P.

$E_1 = \ker(J - I_3)$, ce qui revient au système $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

On a donc $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$E_j = \ker(J - jI_3)$, ce qui revient au système $\begin{cases} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases}$

On a donc $E_j = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \bar{j} \end{pmatrix}\right)$.

$E_{\bar{j}}$ s'obtient par conjugaison, on a donc $E_{\bar{j}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right) \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ j \end{pmatrix}\right)$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ convient donc.

II.A.5) *a)* On a bien sûr $A(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

b) La base de vecteurs propres de J est une base de vecteurs propres de J^2 et, bien sûr, de I_3. C'est donc aussi une base de vecteurs propres de $A(a, b, c)$.

c) Les valeurs propres associées sont respectivement $(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj)$.

d) Le déterminant de $A(a, b, c)$ est le produit de ses valeurs propres.
$\mathrm{Det}(A) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$.

II.A.6) *a)* Par définition, $E = \mathrm{Vect}(I_3, J, J^2)$, donc, E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) (I_3, J, J^2) est clairement une famille libre car $A(a, b, c) = 0$ si et seulement si $a = b = c = 0$. La dimension de E est donc 3.

II.B - Le cas $n \geqslant 3$ quelconque

II.B.1) On calcule U en utilisant le fait que $u(e_i)$ permet d'obtenir sa i-ème colonne.

On obtient $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II.B.2) On a $x_\omega = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k = e_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \omega^{k-1} e_k$

$u(x_\omega) = e_n + \sum\limits_{k=2}^{n} \omega^{k-1} e_{k-1} = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \omega^{k-1} e_{k-1}$, car $\omega^n = 1$.

On réindexe cette somme, $u(x_\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^k e_k = \omega \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k = \omega x_\omega$.

II.B.3) x_ω est donc propre pour la valeur propre ω.

Comme on a n valeurs de ω distinctes possibles, $\omega \in \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\}$,

et comme les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, l'ensemble des vecteurs (x_ω) forme donc une base de vecteurs propres,

et u est ainsi diagonalisable.

II.B.4) u^n est donc aussi diagonalisable, ses valeurs propres sont les ω^n qui valent tous 1 !

u^n est donc diagonalisable avec une valeur propre unique 1, c'est simplement l'identité !

II.C - Le cas $n = 4$

II.C.1) On obtient bien sûr $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^4 = I_4$.

II.C.2) Comme précédemment, $V = aI_4 + bU + cU^2 + dU^3$.

U est diagonalisable, la base de vecteurs propre de U est aussi une base de vecteurs propres de U^2, U^3 et I_4.

C'est donc aussi une base de vecteurs propres de V.

Pour déterminer une telle base, on travaille avec $n = 4$ et les vecteurs ω de la question précédente.

On trouve E_1, en prenant $\omega = 1$. On a donc $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On trouve E_i, en prenant $\omega = \mathrm{i}$. On a donc $E_\mathrm{i} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$.

On trouve E_{-1}, en prenant $\omega = -1$. On a donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On trouve $E_{-\mathrm{i}}$, en prenant $\omega = -\mathrm{i}$. On a donc $E_{-\mathrm{i}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$.

Les valeurs propres de U sont donc $(1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$, dans cet ordre, la base propre étant choisie dans l'ordre ci dessus.

Celles de U^2 sont donc respectivement dans la même base $(1, -1, 1, -1)$, et celles de U^3 sont $(1, -\mathrm{i}, -1, \mathrm{i})$.

Bien sûr, celles de I_4 sont (respectivement) $(1, 1, 1, 1)$.

Les valeurs propres de V dont donc $(a+b+c+d, a+\mathrm{i}b-c-\mathrm{i}d, a-b+c-d, a-\mathrm{i}b-c+\mathrm{i}d)$.

III Le théorème de Caylay-Hamilton

III.A - On est sur $\mathbb{C}$, donc le polynôme caractéristique de A est scindé, donc A est trigonalisable.
C'est à dire qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T, ou inférieure au besoin, et une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

III.B - T et A sont semblables et ont donc le même polynôme caractéristique.

III.C - Remarquons d'abord que $I_nT = TI_n = T$ et que $I_n^2 = I_n$.
Ensuite $(T - \lambda_i I_n)\left(T - \lambda_j I_n\right) = T^2 - \lambda_j I_n - \lambda_i In + \lambda_i \lambda_j I_n$.
Calculons aussi $\left(T - \lambda_j I_n\right)(T - \lambda_i I_n) = T^2 - \lambda_i I_n - \lambda_j In + \lambda_j \lambda_i I_n$.
La somme des matrices et le produit des complexes étant commutatifs, on a bien l'égalité.

III.D - Appelons $t_{i,j}$ les éléments ligne i et colonne j de T.
On a $t_{i,i} = \lambda_i$ et pour $i > j$, $t_{i,j} = 0$. Les autres valeurs sont quelconques à priori.
Les coordonnées de TE_k sont la k-ème colonne de T,
donc $TE_k = t_{1,k}E_1 + t_{2,k}E_2 + \cdots + t_{k-1,k}E_{k-1} + \lambda_k E_k$.
Ainsi, pour k compris entre 1 et $n-1$,
$(T - \lambda_{k+1} I_n) E_{k+1} = TE_{k+1} - \lambda_{k+1}E_{k+1} = t_{1,k+1}E_1 + t_{2,k+1}E_2 + \cdots + t_{k,k+1}E_k \in \mathrm{Vect}\{E_1, \ldots, E_k\}$.
Les termes en E_{k+1} s'annulent, ce qui assure le résultat demandé

III.E - On montre ce résultat par récurrence sur k.
Pour la vérification initiale, $M_1E_1 = (T - \lambda_1 I_n) E_1 = \lambda_1 E_1 - \lambda_1 E_1 = 0$.
On admet la propriété au rang k, on la montre au rang $k+1$, avec $k < n$.
$M_{k+1}E_{k+1} = M_k (T - \lambda_{k+1} I_n) E_{k+1} = M_k (t_{1,k+1}E_1 + t_{2,k+1}E_2 + \cdots + t_{k,k+1}E_k)$
$= t_{1,k+1}M_kE_1 + t_{2,k+1}M_kE_2 + \cdots + t_{k,k+1}M_kE_k = t_{1,k+1}M_kE_1 + t_{2,k+1}M_kE_2 + \cdots + t_{k-1,k+1}M_kE_{k-1}$
Mais, dans M_k, il y a M_1 en facteur, qu'on peut mettre à droite, comme l'a rappelé l'énoncé, or $M_1E_1 = 0$, donc $M_kE_1 = 0$.
De même, dans M_k, il y a M_2 en facteur, qu'on peut mettre à droite, comme l'a rappelé l'énoncé, or $M_2E_2 = 0$, donc $M_kE_2 = 0$.
Ainsi de suite jusqu'à mettre M_{k-1} en facteur à droite, or $M_{k-1}E_{k-1} = 0$, et donc $M_kE_{k-1} = 0$.
On a bien montré que $M_{k+1}E_{k+1} = 0$, ce qui termine la récurrence.

III.F - On a $M_nE_n = 0$, mais, on l'a vu juste auparavant, on a aussi $M_nE_1 = M_nE_2 = \cdots = M_nE_{n-1} = 0$.
Ainsi, par linéarité, $\forall U \in \mathbb{C}^n$, $M_nU = 0$, ce qui implique que $M_n = 0$.
Ce qui fait que $\prod_{j=1}^{n} \left(T - \lambda_j I_n\right) = 0$.
Donc $P\left(\prod_{j=1}^{n} \left(T - \lambda_j I_n\right)\right)P^{-1} = 0 = \prod_{j=1}^{n} \left(P\left(T - \lambda_j I_n\right)P^{-1}\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(A - \lambda_j I_n\right) = 0 = \chi_T(A) = \chi_A(A)$.
On a bien montré que A annule son polynôme caractéristique.

IV Méthodes numériques de calcul du polynôme caractéristique et des valeurs propres d'une matrice réelle

IV.A - Le calcul du polynôme caractéristique

IV.A.1) A est ici une matrice réelle, on la considère comme une matrice complexe, elle annule donc son polynôme caractéristique.
On a donc $A^n - a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_0 I_n = 0$, d'où $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_0 I_n$.
On applique ceci au vecteur X_0, donc $A^n X_0 = a_{n-1}A^{n-1}X_0 + a_{n-2}A^{n-2}X_0 + \cdots + a_0 X_0$.

IV.A.2) On pose $\widetilde{A} = \left(X_0, AX_0, \ldots, A^{n-1}X_0\right)$, matrice décrite ici en colonnes, et $B = A^n X_0$.
On a alors $\widetilde{A}X = B$. Donc X est bien solution du système linéaire indiqué.

IV.A.3) Si la famille $\left(A^{n-1}X_0, A^{n-2}X_0, \ldots, X_0\right)$ est libre, alors la matrice $\widetilde{A}$ est inversible, donc le système $\widetilde{A}X = B$ a une solution unique... et on a a le polynôme caractéristique !

IV.B - Le calcul approché des valeurs propres

IV.B.1) On considère l'application de l'espace vectoriel des suites réelles dans lui-même qui à la suite (y_k) associe la suite (z_k) telle que pour $k \geqslant 0$, on a $z_k = y_{k+n} - a_{n-1}y_{k+n-1} - a_{n-2}y_{k+n-2} - \cdots - a_0 y_k$.
Cette application est linéaire (on peut le montrer en détail au besoin), et F est son noyau.
F est donc un espace vectoriel réel.

IV.B.2) λ_j est une valeur propre, donc racine du polynôme caractéristique,
donc $\lambda_j^n = a_{n-1}\lambda_j^{n-1} + a_{n-2}\lambda_j^{n-2} + \cdots + a_0$.
On multiplie par λ_j^k, on obtient $\lambda_j^{k+n} = a_{n-1}\lambda_j^{k+n-1} + a_{k+n-2}\lambda_j^{n-2} + \cdots + a_0\lambda_j^k$.
La suite $\left(\lambda_j^k\right)$ est bien une suite de F.

IV.B.3) Les propriétés admises par l'énoncé prouvent que les suites $\left(\lambda_j^k\right)$ pour j variant de 1 à n forment une base de F.
Toute suite de F est donc combinaison linéaire des $\left(\lambda_j^k\right)$,
c'est à dire qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tels que $(y_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right)$.
Et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$.

IV.B.4)

a) Les λ_j^k pour j variant de 2 à n sont négligeables devant λ_1^k, compte tenu des hypothèses faites sur les valeurs propres.
Donc, en $+\infty$, $y_k \sim \alpha_1\lambda_1^k$, puisque $\alpha_1 \neq 0$.

b) Comme l'équivalent est non nul, y_k est non nul à partir d'un certain rang.

c) La limite d'un quotient est aussi la limite du quotient des équivalents, ici λ_1,
donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1$.

IV.B.5) À priori, il suffit de choisir $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ tels que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, ce qui n'est pas aussi simple qu'il y parait !
Ensuite, on fait le même travail...
Mais, attention, les erreurs d'arrondis, on est en calcul approché, font qu'on risque de retomber sur λ_1 quand même !

IV.C - Illustration sur un exemple

IV.C.1) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.
Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.

IV.C.2) On a y_0, y_1 quelconques, et, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k$.

IV.C.3) On fait la suite de quelques instructions Maple qui donnent y_{10}.

```
y0:=0;y1:=1;
for i from 2 to 9 do
   y:=3*y1-2*y0;
   y0:=y1;y1:=y
   end do;
y
```

Le résultat, y_{10}, est la dernière valeur donnée.

IV.C.4) On obtient très facilement, même avec une calculatrice *collège*, ou *à la main*, les valeurs successives données ici

$y_0 = 0$
$y_1 = 1$
$y_2 = 3$
$y_3 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7$
$y_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15$
$y_5 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 7 = 31$
$y_6 = 3 \cdot 31 - 2 \cdot 15 = 63$
$y_7 = 3 \cdot 63 - 2 \cdot 31 = 127$
$y_8 = 3 \cdot 127 - 2 \cdot 63 = 255$
$y_9 = 3 \cdot 255 - 2 \cdot 127 = 511$

On aurait aussi pu établir que $y_k = 2^k - 1$ car $1^k = 1$, en alignant les coefficients sur y_0 et y_1.

Il nous reste un dernier calcul $\dfrac{y_4}{y_3} \simeq 2,143$ et $\dfrac{y_5}{y_4} \simeq 2,067$.

Le plus petit entier k cherché, tel que $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$ est proche de λ_1 à $0,1$ près, est $k = 4$.