

Partie I

1. La trace est évidemment linéaire.
2. Si $A = B = I_n$ et $n \geq 2$, $tr(AB) = tr(I_n) = n$ et $tr(A)tr(B) = n^2$, donc

$$\boxed{tr(AB) \neq tr(A)tr(B)}$$

Posons $AB = C$ et $BA = D$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \text{ et } d_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}; \text{ D'où :}$$

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) \text{ (addition commutative et associative)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ki}a_{ik} \right) \\ &= tr(BA). \text{ On a montré :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(AB) = tr(BA)}$$

3. $tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1})$ (d'après la question 2)
 $= tr(A)$.

On a montré :

$$\boxed{tr(P^{-1}AP) = tr(A)}$$

4. Si A et B sont semblables, leurs polynômes caractéristiques sont égaux (polynômes caractéristiques d'un même endomorphisme).

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} a_{11} - X & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} - X & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} - X \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^n (-X)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 & a_{1n} \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ a_{n1} & 0 & \cdot & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i_1 \\ \\ \\ \leftarrow i_{n-k} \end{matrix} \end{vmatrix} \text{ (en développant par multilinéarité)} \end{aligned}$$

dans chaque colonne)

En particulier, le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ii} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & a_{ni} & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow i$, donc, il vaut

$$(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}..$$

$$\boxed{\text{Donc } P_A(X) = (-1)^n (X^n - tr(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A))}$$

Deux matrices semblables A et B ayant mêmes polynômes caractéristiques, les coefficients de X^{n-1} dans chaque polynôme étant égaux, l'on a :

$$\boxed{tr(A) = tr(B)}$$

5. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = 2I_n$, on a alors $tr(AB - BA) = tr(2I_n)$. Or $tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$ et $tr(2I_n) = 2tr(I_n) = 2n$. On ne peut donc avoir $tr(AB - BA) = tr(2I_n)$.

6. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a alors $tr(A) = tr({}^t A) = tr(-A) = -tr(A)$. D'où :

$$\boxed{\text{tr}(A) = 0}$$

Partie II

1. $\rightarrow \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle$. D'où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

$\rightarrow \forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \text{tr}({}^t(\alpha A + \beta B)C) = \alpha \text{tr}({}^tAC) + \beta \text{tr}({}^tBC) = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$. car la transposition et la trace sont linéaires. D'où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et à droite puisque symétrique. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

$\rightarrow \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A, A \rangle = \text{tr}({}^tAA)$. Posons $B = {}^tAA$. On a $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ et

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right). \text{ D'où :}$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \langle A, A \rangle > 0 \text{ et}$$

$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

2. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = A \text{ et } {}^tA = -A\} = \{0\}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$. donc A est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. On en déduit que

$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont supplémentaires.}}$

3. $\langle S, A \rangle = \text{tr}({}^tSA) = \text{tr}(SA)$ car S est symétrique.

D'autre part, $\langle S, A \rangle = \text{tr}({}^t({}^tSA)) = \text{tr}({}^tAS) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$ d'après la première partie.

D'où :

$$\boxed{\langle S, A \rangle = 0}$$

On a alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$; or $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (d'après la question 2); Donc :

$$\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp}$$

et $\underline{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ sont supplémentaires orthogonaux.}}$

4. On a vu que A' est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; d'où si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'on a $A - M = (A - A') + (A' - M)$ où l'on a fait apparaître la somme de 2 matrices orthogonales; d'où :

$$\|A - M\|^2 = \|A - A'\|^2 + \|A' - M\|^2 \text{ et}$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \|A - M\|^2 \geq \|A - A'\|^2}$$

L'on en déduit, puisque $A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, que $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 = \|A - A'\|^2 \Leftrightarrow$

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 \right) = \|A'\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 \right) = \left\| \frac{{}^tA - A}{2} \right\|^2}$$

5. Remarquons que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \|A - M\|^2$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\min_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} f(x,y,z) = \inf_{M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 = \left\| \frac{{}^t A - A}{2} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\boxed{\min_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} f(x,y,z) = \frac{1}{2}}$$

Il est atteint pour $M = \frac{A + {}^t A}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$, c'est à dire pour

$$\boxed{x = 1, y = \frac{5}{2} \text{ et } z = 4}$$

$$6. \|AC - CB\|^2 = \text{tr}({}^t(AC - CB)(AC - CB)) \\ = \text{tr}({}^t C^t A A C - {}^t C^t A C B - {}^t B^t C A C + {}^t B^t C C B) \Rightarrow$$

$$\underline{\|AC - CB\|^2 = \text{tr}({}^t C^t A A C) - \text{tr}({}^t C^t A C B) - \text{tr}({}^t B^t C A C) + \text{tr}({}^t B^t C C B)}$$

$$\|{}^t A C - C^t B\|^2 = \text{tr}({}^t({}^t A C - C^t B)({}^t A C - C^t B)) \\ = \text{tr}({}^t C A^t A C) - \text{tr}({}^t C A C^t B) - \text{tr}(B^t C^t A C) + \text{tr}(B^t C C^t B) \\ = \text{tr}({}^t C^t A A C) - \text{tr}({}^t B^t C A C) - \text{tr}({}^t C^t A C B) + \text{tr}({}^t B B^t C C) \text{ car } A^t A = {}^t A A \text{ et } \\ \text{tr}(MN) = \text{tr}(NM) \\ = \text{tr}({}^t C^t A A C) - \text{tr}({}^t C^t A C B) - \text{tr}({}^t B^t C A C) + \text{tr}(B^t B^t C C) \text{ car } {}^t B B = B^t B \text{ et } \\ \text{tr}({}^t M) = \text{tr}(M) \\ = \text{tr}({}^t C^t A A C) - \text{tr}({}^t C^t A C B) - \text{tr}({}^t B^t C A C) + \text{tr}({}^t B^t C C B) \text{ car } \text{tr}(MN) = \text{tr}(NM).$$

D'où :

$$\underline{\|{}^t A C - C^t B\|^2 = \text{tr}({}^t C^t A A C) - \text{tr}({}^t C^t A C B) - \text{tr}({}^t B^t C A C) + \text{tr}({}^t B^t C C B)}$$

$$\boxed{\|AC - CB\|^2 = \|{}^t A C - C^t B\|^2}$$

On en déduit évidemment :

$$\boxed{AC = CB \Leftrightarrow {}^t A C = C^t B}$$

Partie III

1. Pour $n = 1$, toutes les matrices sont symétriques, permutent 2 à 2 et sont diagonale. La propriété est donc vraie en prenant $\Omega = I_1$.

2.1. Si S_1, \dots, S_p sont diagonale, il suffit encore de prendre $\Omega = I_n$ et l'on a trouvé une matrice Ω orthogonale telle que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \Omega^{-1} S_i \Omega \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

2.2. S_1 étant une matrice symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{R} , S_1 est diagonalisable et il existe $\Omega_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. en ayant formé Ω_1 après avoir ordonné les valeurs propres de S_1 , l'on peut assurer l'existence d'un entier r , d'un réel λ , d'une matrice diagonale Δ d'ordre $n - r$ ne contenant pas λ tels que $\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$. en outre si l'on avait $r = n$, l'on aurait $\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \lambda I_n \Rightarrow S_1 = \lambda I_n$. or S_1 n'est pas diagonale; d'où $\underline{1 \leq r \leq n - 1}$.

$$2.3. \forall i \in \{1, \dots, p\}, {}^t(\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) = \begin{cases} {}^t \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t A_i & {}^t D_i \\ {}^t B_i & {}^t C_i \end{pmatrix} \\ {}^t \Omega_1 {}^t S_i {}^t(\Omega_1^{-1}) = \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 \end{cases} \text{ car } \Omega_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } S_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} {}^tA_i & {}^tD_i \\ {}^tB_i & {}^tC_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

${}^tB_i = D_i$ et A_i et C_i sont symétriques.

$$\begin{aligned} 2.4. \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, S_1 S_i = S_i S_1 &\Leftrightarrow (\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) = (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda A_i & \lambda B_i \\ \Delta D_i & \Delta C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_i & B_i \Delta \\ \lambda D_i & C_i \Delta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} B_i \Delta = \lambda B_i \\ \Delta D_i = \lambda D_i \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases} \end{aligned}$$

Or, d'après 2.3., $\Delta D_i = \lambda D_i \Leftrightarrow \Delta {}^t B_i = \lambda {}^t B_i \Leftrightarrow B_i {}^t \Delta = \lambda B_i \Leftrightarrow B_i \Delta = \lambda B_i$ car $\Delta \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. D'où :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, p\}, S_1 S_i = S_i S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} B_i \Delta = \lambda B_i \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases}}$$

Or $\begin{cases} \text{les colonnes de } B_i \Delta \text{ sont les produits des colonnes de } B_i \text{ par les valeurs propres de } S_1 \text{ distinctes de } \\ \text{les colonnes de } \lambda B_i \text{ sont les produits des colonnes de } B_i \text{ par } \lambda \end{cases}$

Par identification, on déduit $B_i = 0$ et comme $D_i = {}^t B_i$, $D_i = 0$.

D'où :

$$\boxed{B_i = D_i = 0}$$

On peut remarquer que tout ce qui précède est encore vrai pour $i = 1$.

$$\begin{aligned} 2.5. \quad \text{On a alors } \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, S_i S_j = S_j S_i &\Leftrightarrow (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_j \Omega_1) = (\Omega_1^{-1} S_j \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & C_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i A_j & 0 \\ 0 & C_i C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j A_i & 0 \\ 0 & C_j C_i \end{pmatrix}. \text{ On a montré :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i, j \in \{1, \dots, p\}, S_i S_j = S_j S_i \Leftrightarrow \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}}$$

2.6. Les A_i et C_i sont symétriques d'ordre strictement inférieur à n . Les A_i (respectivement les C_i) commutent 2 à 2. D'où d'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux matrices $\Omega_2 \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R})$ et $\Omega_3 \in \mathcal{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, p\}, \begin{cases} \Omega_2^{-1} A_i \Omega_2 \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \\ \Omega_3^{-1} C_i \Omega_3 \in \mathcal{D}_{n-r}(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

Soit alors $\Omega_4 = \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_3 \end{pmatrix}$. Alors $\Omega_4^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_3^{-1} \end{pmatrix} = {}^t \Omega_4$ et $\Omega_4 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, \Omega_4^{-1} (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) \Omega_4 &= \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} A_i \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_3^{-1} C_i \Omega_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

En posant $\Omega = \Omega_1 \Omega_4$, on obtient une matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \Omega^{-1} S_i \Omega \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. On a ainsi montré par récurrence que :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall S_1, \dots, S_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ permutant 2 à 2,}}$$

$$\boxed{\exists \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall i \in \{1, \dots, p\}, \Omega^{-1} S_i \Omega \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$$

3.1. $A_2 = A_1 + I_2$, d'où $A_1 A_2 = A_1^2 + A_1 = A_2 A_1$; comme $A_3 = 0$, A_1, A_2, A_3 commutent 2 à 2.; elles sont aussi symétriques réelles.

De même, $C_2 = C_1 + I_2$ et $C_3 = -C_1 + 2I_2$. D'où, C_1, C_2, C_3 , symétriques réelles, commutent 2 à 2. On a vérifié que :

$$\boxed{\{A_1, A_2, A_3\} \text{ et } \{C_1, C_2, C_3\} \text{ vérifient l'hypothèse } A(2)}$$

Diagonalisons A_1 à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

$$P_{A_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} - X & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} = X^2 - X = X(X-1). \text{ D'où les sous-espaces propres de } A_1 :$$

$$E_{A_1}(1) \text{ a pour équation } -\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \text{ et } E_{A_1}(1) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{A_1}(0) \text{ a pour équation } \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}y \text{ et } E_{A_1}(0) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{En posant } \Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ on a alors } \underline{\forall i \in \{1, 2, 3\}, \Omega_2^{-1} A_i \Omega_2 = A'_i \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})}.$$

$$\boxed{A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A'_2 = A'_1 + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A'_3 = 0.}$$

Diagonalisons C_1 à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

$$P_{C_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} = X^2 - X = X(X-1). \text{ D'où les sous-espaces propres de } C_1 :$$

$$E_{C_1}(1) \text{ a pour équation } -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ et } E_{C_1}(1) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{C_1}(0) \text{ a pour équation } \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow x = -y \text{ et } E_{C_1}(0) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{En posant } \Omega'_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \text{ on a alors } \underline{\forall i \in \{1, 2, 3\}, \Omega_2^{-1} C_i \Omega_2 = C'_i \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{C'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C'_2 = C'_1 + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C'_3 = -C'_1 + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien sur aussi $\underline{\Omega_2 \text{ et } \Omega'_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})}$.

3.2. Posons $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega'_2 \end{pmatrix}$. On a alors, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\Omega^{-1} S_i \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_2'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} A_i \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_2' C_i \Omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_i & 0 \\ 0 & C'_i \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_4(\mathbb{R}).$$

En outre,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$$

et les colonnes V_1, V_2, V_3, V_4 de Ω sont donc des vecteurs propres communs à S_1, S_2, S_3 .

Comme $\Omega^{-1}S_i\Omega = \begin{pmatrix} A'_i & 0 \\ 0 & C'_i \end{pmatrix}$, les valeurs propres associées (sur la diagonale) sont :

	S_1	S_2	S_3
V_1	1	2	0
V_2	0	1	0
V_3	1	2	1
V_4	0	1	2

△△△

Rédigé par

*Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 StBrieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace