Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I concours Centrale-Supélec 2005

Partie I

I.A.1) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(n\alpha) &= \frac{e^{n\alpha}+e^{-n\alpha}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-k}\left(\mathrm{sh}(\alpha)^k+(-1)^k\mathrm{sh}(\alpha)^k\right) \\ &= \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\mathrm{sh}(\alpha)^{2k} \text{ (simplification des termes de rang impair)} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\left(\mathrm{ch}(\alpha)^2-1\right)^k \end{aligned}.$$

D'où :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\left(\mathrm{ch}(\alpha)^2-1\right)^k}$$

I.A.2) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\ X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k$.

Alors, d'après I.A.1), $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}(\alpha))$. Cela prouve l'existence des polynômes P_n cherchés et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\ X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k}$$

D'où, par application de la formule précédente :
$\underline{P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = 2X^2-1,\ P_3 = 4X^3-3X,\ P_4 = 8X^4-8X^2+1}$

I.B.1) L'on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}(n\alpha)+\mathrm{ch}((n-2)\alpha) &&= 2\mathrm{ch}((n-1)\alpha)\mathrm{ch}(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ &P_n(\mathrm{ch}(\alpha))+P_{n-2}(\mathrm{ch}(\alpha)) &&= 2P_{n-1}(\mathrm{ch}(\alpha))P_1(\mathrm{ch}(\alpha)) \end{aligned}$$

Comme $\forall y \in [1,+\infty[,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ y = \mathrm{ch}(\alpha)$, on en déduit que le polynôme $P_n + P_{n-2} - 2X.P_{n-1}$ s'annule pour tout $y \in [1,+\infty[$. Ayant une infinité de racines, il est nul et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n + P_{n-2} = 2X.P_{n-1}}$$

P_0 et P_1 étant évidemment définis de manière unique, la propriété précédente donnant P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}, une démonstration par récurrence simple justifie
l'unicité de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.B.2) On montrerait, comme dans la question I.A.1., que :

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\alpha) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\ \cos(\alpha)^{n-2k}\left(\cos(\alpha)^2-1\right)^k$,

les formules de trigonométrie hyperboliques se déduisant des formules de trigonométrie circulaire en substituant ch à cos et $i$sh à sin. D'où :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\alpha) = P_n(\cos(\alpha))}$$

I.B.3) Une récurrence simple montre que P_n est de degré n, que son coefficient dominant est 1 pour $n = 0$ et 2^{n-1} pour $n \geq 1$ et que P_n est de la parité de n.

I.B.4) Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| > 1$ et $n \geq 1$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ |x| = \text{ch}(\alpha)$

Comme P_n est pair ou impair, $|P_n(x)| = |P_n(|x|)| = |P_n(\text{ch}(\alpha))| = \text{ch}(n\alpha) > 1$ car $n\alpha \neq 0$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| > 1 \Rightarrow |P_n(x)| > 1}$$

I.C - Résolvons l'équation $\cos(n\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} \cos(n\alpha) = 0 &\Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

D'où $P_n(\cos(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

En particulier, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $P_n\left(\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = 0$.

Or comme la suite $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)_{k \in \{0,1,\ldots,n-1\}}$ est une suite de réels de $]0, \pi[$ strictement croissante et cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, la suite $\left(\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)_{k \in \{0,1,\ldots,n-1\}}$ est une suite strictement décroissante de n réels de $]-1, 1[$ qui annulent chacun le polynôme P_n de degré n. Ce sont donc les n racines de P_n.

<u>Les racines de P_n sont donc toutes réelles, distinctes et appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.</u> Selon l'énoncé, on peut poser :

$$\boxed{x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1}$$

<u>Partie II</u>

II.A.1) Pour $f \in E,\ f$ est bornée. Supposons $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leq M$.

Comme $t \to \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$, $\forall t \in]-1, 1[$, $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\int_{-1}^{1} \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge (simple), on en déduit que :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \text{ converge.}}$$

II.A.2. Comme l'intégrale est linéaire, Φ est bilinéaire.

Φ est évidemment symétrique.

Soit $f \in E \backslash \{0\}$, alors $(f|f) \geq 0$. Si $(f|f) = 0$, comme $t \to \dfrac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1, 1[$, l'on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1, 1[,\ \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 &\Leftrightarrow f(t)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(t) = 0 \end{aligned}$$

f étant continue sur $[-1, 1]$, $f = 0$. Il y a contradiction, donc $\Phi(f, f) > 0$ et Φ est définie positive. D'où :

<u>Φ est un produit scalaire sur E.</u>

II.B - $u \to t = \cos(u)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$. C'est donc un changement de variables valide dans I_n et $I_n = \int_0^{\pi} \cos(u)^n du$. Une intégration par parties montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

Or $I_0 = \int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = [\arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$ et $I_1 = 0$ car la fonction intégrée est impaire. D'où :

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\
&= \ldots \text{(récurrence simple)} \\
&= \frac{(2p-1)\ldots 3.1}{(2p)\ldots 4.2} I_0 \\
&= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{(formule encore vraie pour p=0)}
\end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } I_{2p+1} = 0}$$

II.C.1) Le même changement de variables qu'en II.B. montre que, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} \dfrac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi} \cos(mu)\cos(nu)du$. D'où :

$$\begin{aligned}
\text{Si } m \neq n,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos((m+n)u) + \cos((m-n)u)\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)u)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)u)}{m-n}\right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } m = n \neq 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos(2mu) + 1\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2mu)}{2m} + u\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } m = n = 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_0^{\pi} du \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En résumé, } \begin{cases} \text{si } m \neq n,\ \int_{-1}^{1} \dfrac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0 \\ \text{si } m = n \neq 0,\ \int_{-1}^{1} \dfrac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{si } m = n = 0,\ \int_{-1}^{1} \dfrac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \pi \end{cases}}$$

On en déduit que $\underline{(P_n)_n \in \mathbb{N} \text{ est une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire } \Phi.}$

II.C.2) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une suite de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés de F_n. C'en est donc une base. Soient m et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$.

$\exists(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-1}^{1} \frac{P_k(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= 0 \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0}$$

II.D - On a vu que $F_4 = Vect\{P_0, \dots, P_4\}$ et $(P_0, \dots, P_4)$ est une base orthogonale de F_4. $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_4}{\|P_4\|}\right)$ est donc une base orthonormée de F_4.

La distance de h à F_4 vaut $\sqrt{\|h\|^2 - \|\overline{h}\|^2}$ où $\overline{h}$ désigne la projection orthogonale de h sur F_4.

$\overline{h} = \sum\limits_{k=0}^{4} \left(h|\frac{P_k}{\|P_k\|}\right) \frac{P_k}{\|P_k\|}$.

D'où, $\|\overline{h}\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} \left(h|\frac{P_k}{\|P_k\|}\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} \frac{(h|P_k)^2}{\|P_k\|^2}$.

Or $(h|P_k) = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1} P_k(t)dt$. D'où :

$(h|P_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2$.

$(h|P_1) = \int_{-1}^{1} tdt = 0$.

$(h|P_2) = 2\int_{0}^{1} (2t^2-1)dt = -\frac{2}{3}$.

$(h|P_3) = \int_{-1}^{1} (4t^3-3t)dt = 0$ (polynôme impair).

$(h|P_4) = 2\int_{0}^{1} (8t^4-8t^2+1)dt = -\frac{2}{15}$. Donc :

$\|\overline{h}\|^2 = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{9\pi} + \frac{8}{225\pi} = \frac{1108}{225\pi}$.

Enfin $\|h\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{0}^{\pi} \sin(u)^2 du = \frac{\pi}{2}$.

D'où : $d(h, F_4) = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{1108}{225\pi}} \Rightarrow \boxed{d(h, F_4) = \frac{1}{30}\sqrt{\frac{450\pi^2 - 4432}{\pi}}}$

Partie III

III.A.1) $\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)] = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}P'(x) + \sqrt{1-x^2}P''(x)$, ce qui montre que $\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)] = -xP'(x) + (1-x^2)P''(x)$.

Posons $Q = -XP' + (1-X^2)P''$.

Alors $\forall x \in]-1, 1[,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)]$. D'où l'existence de Q.

Si 2 polynômes Q_1 et Q_2 vérifient la même propriété, alors $\forall x \in]-1, 1[,\ Q_1(x) = Q_2(x)$; cela montre que $Q_1 - Q_2$ possède une infinité de racines et donc qu'il est nul : $Q_1 = Q_2$. D'où l'unicité de Q.

Donc, pour tout P de F_n, il existe un polynôme Q unique tel que :

$$\underline{\forall x \in]-1, 1[,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)]}$$

La dérivation étant linéaire, φ est évidemment linéaire ; en outre, comme $P \in F_n$, $-XP' + (1-X^2)P'' \in F_n$. D'où :

$$\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme de } F_n}$$

III.A.2) $\varphi(1) = 0$

$$\begin{array}{ll}\varphi(X) = -X & \\ \forall k \in \{2,\ldots,n\},\ \varphi(X^k) & = -X.kX^{k-1} + (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} \\ & = -kX^k + k(k-1)X^{k-2} - k(k-1)X^k \\ & = -k^2X^k + k(k-1)X^{k-2}\end{array}$$

D'où la matrice de φ dans la base canonique de F_n.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & \\ & -1 & 0 & & & (0) & \\ & & -4 & . & k(k-1) & & \\ & & & . & 0 & & \\ & & & & -k^2 & . & n(n-1) \\ & (0) & & & & . & 0 \\ & & & & & & -n^2 \end{pmatrix}}$$

III.A.3) Les valeurs propres de φ se trouvent sur la diagonale de M (triangulaire). On constate que φ possède $n+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes. Comme en outre $\dim F_n = n+1$, $\underline{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

III.B.1) $\forall P,\ Q \in F_n$,

$$\begin{array}{ll}\Phi(\varphi(P), Q) & = \int_{-1}^{1} \dfrac{\varphi(P)(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ & = \int_{-1}^{1} \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2}P'(t)\right)Q(t)dt \\ & = \left[\sqrt{1-t^2}P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)dt \text{ (intégration par parties)} \\ & = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)dt\end{array}$$

De même, $\Phi(P, \varphi(Q)) = \Phi(\varphi(Q), P) = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)dt = \Phi(\varphi(P), Q)$.

On en déduit que $\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$

III.B.2) La matrice M de φ montre que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \varphi(X^k) \in Vect\{1, X, \ldots, X^k\}$; d'où, comme $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ d^oP_k = k,\ \varphi(P_k) \in Vect\{1, X, \ldots, X^k\} = Vect\{P_0, \ldots, P_k\}$.

Posons donc $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \varphi(P_k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$.

On a alors $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \forall j \in \{0,1,\ldots,k\}$,

$$\begin{array}{ll}(\varphi(P_k)|P_j) & = (\sum\limits_{i=0}^{k}\lambda_i P_i|P_j) \\ & = \sum\limits_{i=0}^{k}\lambda_i(P_i|P_j) \\ & = \lambda_j(P_j|P_j) \text{ (car } (P_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}} \text{ est orthogonale)}\end{array}$$

D'autre part :

$(\varphi(P_k)|P_j) = (P_k|\varphi(P_j))$. Or si $j < k$, $(P_k|\varphi(P_j)) = 0$ car d'après II.C.2), pour tout polynôme Q de F_j, $(P_k|Q) = 0$ et $\varphi(P_j) \in F_j$.

Donc pour $j < k$, $\lambda_j(P_j|P_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ (car $P_j \neq 0$). On en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \varphi(P_k) = \lambda_k P_k}$$

.

Posons $P_k = \sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i X^i$. Alors $\alpha_k \neq 0$ et $\varphi(P_k) = \sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\varphi(X^i)$. Le terme de plus haut degré de $\varphi(P_k)$ se trouve dans $\alpha_k\varphi(X^k)$ et vaut à la fois, $\alpha_k \times (-k^2X^k)$ et $\lambda_k \times \alpha_k X^k$.

On en déduit :

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \lambda_k = -k^2}$$

III.B.3) III.B.2) montre que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de F_n, formée de vecteurs propres de φ. En outre, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ \varphi(P_k)$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $-k^2$. Donc, on a retrouvé :

φ est diagonalisable, le spectre de φ, ainsi qu'une base de vecteurs propres de φ.

III.C.1) Posons $p_\lambda : \begin{array}{l} F_2^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \to \lambda(P|Q) + \dfrac{(\varphi(P)|Q) + (P|\varphi(Q))}{2} \end{array}$

Alors p_λ est évidemment bilinéaire et symétrique (propriétés du produit scalaire Φ).
D'autre part, $\forall P \in F_2,\ p_\lambda(P,P) = q_\lambda(P)$. Donc :

$$\boxed{q_\lambda \text{ est une forme quadratique sur } F_2 \text{ associée à la forme polaire } p_\lambda}$$

III.C.2) Utilisons la base orthonormée de F_2, (Q_0, Q_1, Q_2) où $Q_k = \dfrac{P_k}{\|P_k\|}$. Posons, pour tout P de F_2, $P = xQ_0 + yQ_1 + zQ_2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors}\quad q_\lambda(P) &= \lambda(x^2+y^2+z^2) + (-yQ_1 - 4zQ_2 | xQ_0 + yQ_1 + zQ_2) \\ &= \lambda(x^2+y^2+z^2) - y^2 - 4z^2 \\ &= \lambda x^2 + (\lambda-1)y^2 + (\lambda-4)z^2 \end{aligned}$$

La nature de la quadrique d'équation $q_\lambda(P) = 1$ est alors donnée par le tableau suivant :

λ	$\lambda \leq 0$	$0 < \lambda < 1$	1	$1 < \lambda < 4$	4	$\lambda > 4$
Nature de la quadrique	$\emptyset$	hyperboloïde à 2 nappes	cylindre hyperbolique	hyperboloïde à une nappe	cylindre elliptique	ellipsoïde

Partie IV

IV.A.1) L'application : $R : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \to \int_{-1}^1 \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - (A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) \end{array}$ est linéaire
(car l'intégrale est linéaire et par définition des opérations dans E)

Sa restriction à F_2 est nulle si et seulement si $R(P_0) = 0,\ R(P_1) = 0$ et $R(P_2) = 0$.
Cela donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} A_0 + A_1 + A_2 & = (P_0|P_0) = \pi \\ x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 & = (P_1|P_0) = 0 \\ (2x_0^2-1)A_0 + (2x_1^2-1)A_1 + (2x_2^2-1)A_2 & = (P_2|P_0) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{ll} A_0 + A_1 + A_2 & = \pi \\ x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 & = 0 \\ x_0^2A_0 + x_1^2A_1 + x_2^2A_2 & = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}.$$

Or $x_0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ x_2 = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où :

$$\left\{\begin{array}{ll} A_0 + A_1 + A_2 & = \pi \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_2 & = 0 \\ \dfrac{3}{4}A_0 + \dfrac{3}{4}A_2 & = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow (A_0, A_1, A_2) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right). \text{ Donc :}$$

$$\boxed{(\forall P \in F_2,\ R(P) = 0) \Leftrightarrow (A_0, A_1, A_2) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)}$$

IV.A.2) Soit $P \in F_5$; posons $P = QP_3 + L$ où Q et L sont les quotient et reste de la division euclidienne de P par P_3. On a alors à la fois $d^oQ \leq 2$ et $d^oL \leq 2$ car $d^oP_3 = 3$ et $d^oP \leq 5$.

$$\begin{aligned}\text{D'où}\quad R(P) &= \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P_3(t)+L(t)}{\sqrt{1-t^2}} - A_0P(x_0) - A_1P(x_1) - A_2P(x_2)\\ &= (Q|P_3) + \int_{-1}^{1} \frac{L(t)}{\sqrt{1-t^2}} - A_0L(x_0) - A_1L(x_1) - A_2L(x_2)\\ &= \int_{-1}^{1} \frac{L(t)}{\sqrt{1-t^2}} - A_0L(x_0) - A_1L(x_1) - A_2L(x_2)\\ &= 0\end{aligned}$$

(car $P_3(x_k) = 0$ et $(Q|P_3) = 0$ puisque $d^oQ \leq 2$ (II.C.2))
J'ai montré, que pour les valeurs de A_0, A_1 et A_2 trouvées précédemment :

$$\boxed{\forall P \in F_5,\ R(P) = 0}$$

IV.B - $x \xrightarrow{l} \dfrac{x^5}{\sqrt{-x^2-2x}}$ est continue sur $]-2, 0[$.
En outre, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^5}{\sqrt{-x^2-2x}} = 0$ et l se prolonge par continuité en 0.
De plus, $l(x) \underset{x\to -2^+}{\sim} \dfrac{(-2)^5}{\sqrt{2(x+2)}} = \dfrac{k}{(x+2)^{1/2}}$.
Donc $\underline{I \text{ converge}}$.
Effectuons dans I le changement de variables $t = x + 1$. On a alors :
$I = \int_{-1}^{1} \dfrac{(t-1)^5}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
Soit $P = (X-1)^5$. Alors $I = A_0P(x_0) + A_1P(x_1) + A_2P(x_2)$ puisque $R(P) = 0$ (IV.A)). D'où :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^5 + (-1)^5 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^5\right) \\ &= -\frac{63\pi}{8}\end{aligned}$$

. Donc :

$$\boxed{I = -\frac{63\pi}{8}}$$

$$\begin{aligned}\text{IV.C.1)}\quad \sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \text{Re } e^{i(2j+1)x}\\ &= \text{Re } e^{ix} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2ijx}\\ &= \text{Re } e^{ix} \frac{e^{2inx}-1}{e^{2ix}-1} \text{ (car } x \neq 0\ [\pi])\\ &= \text{Re } e^{inx} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\\ &= \frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin(x)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}}$$

$$\begin{aligned}\text{IV.C.2)}\quad \sum_{j=0}^{n-1} P_k(x_j) &= \sum_{j=0}^{n-1} P_k\left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2n}\right)\end{aligned}$$

Pour $k=0$, on obtient $S_k = n$ et pour $0 < k < 2n-1,\ 0 < \dfrac{k\pi}{2n} < \pi \Rightarrow \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right) \neq 0$.

$$\text{D'où}\quad S_k = \frac{\sin\left(2n\dfrac{k\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)} = 0$$

$$\boxed{\text{On a montré que, pour } k=0,\ S_k = n \text{ et pour } 0 < k < 2n,\ S_k = 0}$$

IV.C.3) *Analyse :* Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall P \in F_{2n-1},\ \int_{-1}^{1} \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \alpha \sum\limits_{j=0}^{n-1} P(x_j)$.

Alors $\int_{-1}^{1} \dfrac{P_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \alpha \sum\limits_{j=0}^{n-1} P_0(x_j) \Rightarrow \pi = n\alpha$.

D'où $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$.

Synthèse : Soit $P \in F_{2n-1}$; alors $\exists!(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n},\ P = \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \lambda_k P_k$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k \int_{-1}^{1} \frac{P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k (P_k|P_0) \\ &= \lambda_0 \pi\end{aligned}$$

car $(P_0, \ldots, P_{2n-1})$ est orthogonale.

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(x_j) &= \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k P_k(x_j) \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_k(x_j)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\lambda_0 n = \lambda_0 \pi\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, il existe un réel unique } \alpha = \frac{\pi}{n} \text{ tel que } \forall P \in F_{2n-1},\ \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} P(x_j).}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr