CCP MP 2015 maths2

Exercice I (informatique)

I.1 On obtient la décomposition binaire par des divisions euclidiennes successives par 2. En fait, il suffit d'appliquer l'algorithme donné dans la fonction `mystere` de la question suivante. On trouve

$$21 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4.$$

I.2 La valeur renvoyée par `mystere(256,10)` est $[6, 5, 2]$, *i. e.*, la liste des décimales de 256 en commençant par les unités.

k	1	2	3
c_k	6	5	2
t_k	$[6]$	$[6,5]$	$[6,5,2]$
n_k	25	2	0

I.3 (a) On suppose ici que $b > 1$ (petite erreur dans l'énoncé). La suite (n_k) est à valeurs entières et strictement décroissante. Donc il existe un rang p tel que $n_p = 0$, ce qui fait que la boucle `while` se termine.

(b) On montre par récurrence que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $n_k \leqslant \frac{n}{10^k}$. C'est vrai pour $k = 0$ car $n_0 = n$. Supposons que $n_k \leqslant \frac{n}{10^k}$ pour un entier $k \in [\![0, p-1]\!]$. L'entier n_{k+1} est le quotient de la division euclidienne de n_k par 10. On peut donc écrire $n_{k+1} \leqslant \frac{n_k}{10}$, d'où l'on déduit que $n_{k+1} \leqslant \frac{n}{10^{k+1}}$.
En particulier, pour $k = p - 1$ on a $n_{p-1} > 0$, ce qui permet d'obtenir la majoration $10^{p-1} \leqslant n$, d'où l'on tire $p \leqslant 1 + \log n$.

I.4 Il faut comprendre ici que l'on demande la somme des chiffres en base 10. On utilise la fonction `mystere` pour obtenir la liste des décimales, et on additionne ensuite les éléments de la liste.

```
def somme_chiffres(n):
   t = mystere(n,10)
   s = 0
   p = len(t)
   for k in range(p):
      s = s + t[k]
   return s
```

I.5 On suppose que l'on a obtenu la liste `t` des chiffres de l'entier n dans la base b. On écrit une fonction récursive `somme_rec(t,s)` qui calcule la somme s des chiffres de t. On appellera la fonction en prenant $s = 0$.

```
def somme_rec(t,s):
    if t == []:       #
        return s      # condition d'arrêt
    else:
        s = s + t[-1] # on ajoute à s le dernier élément de t
        t.pop()       # on supprime le dernier élément de t
        return somme_rec(t,s)
```

Exercice II

II.1 On trouve $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

II.2 Le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}$ possède une base naturelle qui est (E_{11}, E_{12}, E_{22}), où E_{ij} désigne la matrice élémentaire dont les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i, j) qui vaut 1. On constate que cette base est orthonormée pour le produit scalaire considéré.

L'orthogonal $\mathcal{T}^\perp$ est de dimension $4 - 3 = 1$, engendré par E_{21}. Cette matrice étant unitaire, (E_{21}) est une base orthonormée de $\mathcal{T}^\perp$.

II.3 D'après le cours, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{T}$ est $\langle A, E_{11}\rangle E_{11} + \langle A, E_{12}\rangle E_{12} + \langle A, E_{22}\rangle E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le projeté orthogonal B de A sur $\mathcal{T}^\perp$ est $B = \langle A, E_{21}\rangle E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, $\mathrm{d}(A, \mathcal{T}) = \|B\| = 3$.

Problème

Partie préliminaire

III.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C = AB$. Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

On en déduit que $\|C\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$, puis que $\|C\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

III.2 D'après le cours, dans tout espace vectoriel normé de dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence.

III.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\|\ \|$ est une norme d'algèbre, on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|\frac{1}{k!} M^k\| \leqslant \frac{1}{k!}\|M\|^k$ (se prouve par récurrence). La série numérique $\sum \frac{1}{k!}\|M\|^k$ converge (vers $\exp(\|M\|)$) ; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit la convergence absolue de $\sum \frac{1}{k!} M^k$, donc sa convergence d'après la question précédente.

Première partie

III.4 Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, on en déduit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Soit T une matrice triangulaire semblable à M. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PTP^{-1}$. On a $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$ (pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} M^k = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} T^k\right) P^{-1}$ par linéarité, puis on passe à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ en utilisant la continuité séquencielle de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, cette dernière étant continue car linéaire en dimension finie). On en déduit que $\det\exp(M) = \det\exp(T)$ car deux matrices semblables ont même déterminant. La matrice $\exp(T)$ étant triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux qui sont les λ_i, valeurs propres de M (en effet, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique). Finalement,

$$\det(\exp M) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\operatorname{tr} M}.$$

III.5 On trouve $\det A = -12$ (confirmé par la valeur de χ_A donnée dans la page suivante...). S'il existait $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait $\det(B)^2 = \det A$, et $\det A$ serait positif, ce qui n'est pas le cas. Donc il n'existe pas de telle matrice B.

D'après la question précédente, si $A = \exp M$, alors $\det A = e^{\operatorname{tr} M}$. Donc s'il existait une telle matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det A$ serait un réel positif, ce qui n'est pas. Une telle matrice M n'existe pas.

Deuxième partie

III.6 (a) Il suffit de choisir $f : x \mapsto \alpha x^0 3^x e^{i\pi x} + \beta x^2 2^x e^{i0x}$.

(b) On remarque que $(x+x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)} = c_0 (x+x_0)^k \rho^x e^{i\theta x}$, où $c_0 = \rho^{x_0} e^{ix_0} \in \mathbb{C}$ est une constante. En développant par le binôme de Newton la quantité $(x+x_0)^k$, on voit alors que $x \mapsto c_0(x+x_0)^k \rho^x e^{i\theta x}$ est un élément de F. Tout élément f de F étant une combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$, ceci montre que $x \mapsto f(x+x_0)$ est encore un élément de F.

III.7 (a) Notons $u_n = n^2(2/3)^n e^{i\theta n}$. On a $|u_n| = n^2(2/3)^n$ qui tend vers 0 par croissance comparée.

(b) Supposons dans un premier temps que $\rho_1 < \rho_2$. En divisant par ρ_2^n l'égalité $\alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} \rho_2^n e^{i\theta_2 n} = 0$, on obtient $\alpha n^{k_1} (\rho_1/\rho_2)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} e^{i\theta_2 n} = 0$. En raisonnant comme dans la question précédente, on voit que $\alpha n^{k_1}(\rho_1/\rho_2)^n e^{i\theta_1 n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si $\beta \neq 0$, on aboutit à une absurdité parce que la quantité $n^{k_2} e^{i\theta_2 n}$ ne tend pas vers 0 (son module ne tend pas vers 0). Finalement, on a nécessairement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Cas $\rho_1 = \rho_2$: on peut supposer sans restriction que $k_2 \leqslant k_1$; pour $n \neq 0$, on simplifie par ρ_1^n et on multiplie par $n^{-k_1} e^{-i\theta_1 n}$ pour obtenir $\alpha = -\beta n^{k_2 - k_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)n}$. Si $k_2 - k_1 < 0$, le terme de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui entraîne $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Si $k_2 = k_1$, supposons par l'absurde que $\beta \neq 0$. En faisant par exemple $n = 1$ et $n = 2$, on obtient que $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 0$, donc $\theta_2 - \theta_1 = 0 \pmod{2\pi}$. Compte tenu des hypothèses sur θ_1 et θ_2, ceci est absurde. Finalement, $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

(c) Soit $f, g \in F$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n)$. Alors $f - g$ est un élément de F vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f-g)(n) = 0$. D'après le résultat admis, $f = g$.

III.8 En écrivant la division euclidienne de X^n par χ_A, on obtient l'existence d'un polynôme Q_n et de trois réels a_n, b_n, c_n tels que $X^n = \chi_A Q_n + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En évaluant en A, il vient, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

1^er cas : si A admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) sont déterminées en résolvant le système de Cramer

$$\begin{cases} \lambda_1^n = a_n \lambda_1^2 + b_n \lambda_1 + c_n \\ \lambda_2^n = a_n \lambda_2^2 + b_n \lambda_2 + c_n \\ \lambda_3^n = a_n \lambda_3^2 + b_n \lambda_3 + c_n \end{cases}$$

En écrivant $\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, on voit alors en appliquant les formules de Cramer que les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires d'expression du type $\rho_k^n e^{i\theta_k n}$ avec $\rho_k > 0$ car aucun des λ_k n'est nul puisque A est supposée inversible.

2^e cas : si A admet une valeur propre double (disons λ_1) et une valeur propre simple λ_2. Le système de Cramer que l'on obtient cette fois-ci, en dérivant l'égalité polynomiale issue de la division euclidienne puis en évaluant en les λ_k est

$$\begin{cases} \lambda_1^n = a_n \lambda_1^2 + b_n \lambda_1 + c_n \\ n\lambda_1^{n-1} = 2a_n \lambda_1 + b_n \\ \lambda_2^n = a_n \lambda_2^2 + b_n \lambda_2 + c_n \end{cases}$$

En écrivant $\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, on voit en appliquant les formules de Cramer que les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires de termes en $n^{k_1} \rho_1^n e^{in\theta_1}$, où $k_1 \in \{0, 1\}$ et en $\rho_2^n e^{in\theta_2}$.

3^e cas : si λ_1 est valeur propre triple. On procède de même en dérivant deux fois l'égalité polynomiale. On obtient cette fois pour coefficients de A^n des combinaisons linéaires de termes de la forme $n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n}$ avec $k_1 \in \{0, 1, 2\}$.

III.9 (a) De la relation $A^n = (\omega_{ij}(n))$, on déduit immédiatement que $\gamma(0) = A^0 = I_3$ et $\gamma(1) = A^1 = A$.

(b) Cela découle immédiatement de la relation $A^{n+m} = A^n A^m$.

(c) D'après III.7.c., il suffit d'établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n)$ (on remarque que f et g sont bien des éléments de F d'après III.6.b.). En calculant le terme d'indice (i, j) de la matrice $A^{n+m} = A^n A^m$, on trouve d'une part, par définition, $\omega_{i,j}(n+m)$, et d'autre part en appliquant le produit matriciel, $\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(n)\omega_{ij}(m)$. On en déduit que $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure que $f = g$.

On peut ensuite écrire successivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$

$$\gamma(x+m) = (\omega_{ij}(x+m)) = (f(x)) = (g(x))$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(x)\omega_{kj}(m) \right) = \gamma(x)\gamma(m).$$

(d) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $\gamma(x+y)$ sont les fonctions $y \mapsto \omega_{ij}(x+y)$, éléments de F. Évaluées en $m \in \mathbb{N}$, ces fonctions valent $\omega_{ij}(x+m) = \omega_{ij}(x)\omega_{ij}(m)$. En appliquant une nouvelle fois III.7.c., on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\omega_{ij}(x+y) = \omega_{ij}(x)\omega_{ij}(y)$, d'où $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10 On fait $x = 1$ et $y = -1$ dans la relation $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ pour obtenir $I_3 = A\gamma(-1)$. On en déduit que $A^{-1} = \gamma(-1)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que $\gamma(\frac{k}{p}) = \gamma(\frac{1}{p})^k$. C'est trivialement vrai pour $k = 1$ et l'hérédité se prouve en prenant $x = k/p$ et $y = 1/p$ dans la relation $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

On en déduit en particulier pour $k = p$ que $\gamma(1) = \gamma(\frac{1}{p})^p$. Or $\gamma(1) = A$, d'où le résultat.

III.11 Une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est dérivable si et seulement si chacune des 9 fonctions coefficients est dérivable. Ces fonctions sont des combinaisons linéaires de termes en $t^k \rho^t e^{i\theta t}$, qui sont dérivables comme produits de fonctions usuelles dérivables.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma(t+x) = \gamma(t)\gamma(x)$. D'après le cours, on sait que la dérivée d'une composée $f \circ g$, où f est linéaire et g est dérivable à valeurs vectorielles est $(f \circ g)' = f \circ g'$. On en déduit que $\gamma'(t+x) = \gamma'(t)\gamma(x)$ (ici la fonction linéaire est la multiplication à droite par la matrice $\gamma(x)$). En particulier, pour $t = 0$, on obtient $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x)$. Enfin, on a déjà vu que $\gamma(0) = I_3$.

D'après le cours sur les équations différentielles linéaires à valeurs vectorielles, l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \gamma'(0)u(t) \\ u(0) = I_3 \end{cases}$$

est $\gamma(t) = \exp(t\gamma'(0)) \times I_3 = \exp(t\gamma'(0))$. En particulier, en $t = 1$ on obtient $A = \exp(\gamma'(0))$.

Troisième partie

III.12 On trouve $\chi_A = (X+1)(X-2)^2$. Comme le rang de $A - 2I_2$ est 2, la dimension de l'espace propre associé à 2 est 1 par le théorème du rang. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

III.13 Pour répondre aux questions qui suivent, nous allons déterminer explicitement la matrice $\gamma(t)$. On commence par chercher une expression de A^n. En suivant la méthode du paragraphe explicatif, on est amené à résoudre

$$\begin{cases} (-1)^n = a - b + c \\ 2^n = 4a + 2b + c \\ n2^{n-1} = 4a + b \end{cases}$$

On trouve $a = \frac{(-1)^n}{9} + \frac{n2^n}{6} - \frac{2^n}{9}$, $b = -(-1)^n\frac{4}{9} + \frac{4}{9}2^n - \frac{n2^n}{6}$ et $c = (-1)^n\frac{4}{9} + \frac{5}{9}2^n - \frac{n2^n}{3}$. D'où l'on déduit

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3 = \begin{pmatrix} 2^n + \frac{1}{2}n2^n & 0 & \frac{1}{2}n2^n \\ \frac{1}{2}n2^n & (-1)^n & -2^n + (-1)^n + \frac{1}{2}n2^n \\ -\frac{1}{2}n2^n & 0 & 2^n - \frac{1}{2}n2^n \end{pmatrix}.$$

La matrice $\gamma(t)$ correspondante est

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2^t + \frac{1}{2}t2^t & 0 & \frac{1}{2}t2^t \\ \frac{1}{2}t2^t & e^{i\pi t} & -2^t + e^{i\pi t} + \frac{1}{2}t2^t \\ -\frac{1}{2}t2^t & 0 & 2^t - \frac{1}{2}t2^t \end{pmatrix}.$$

(a) D'après III.10, $A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

(b) D'après III.10, on peut prendre $B = \gamma(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & i & -\frac{3}{4}\sqrt{2} + i \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(c) D'après III.11, on peut prendre $M = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & -\ln 2 + i\pi + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ln 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.