CCP PSI 2020 - Un corrigé

PROBLÈME 1
Autour de la fonction sinus cardinal

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Q1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction sinus est de classe C^1 sur $[0,t]$ et pour tout $x \in [0,t]$, $\left|\sin'(t)\right| = |\cos(t)| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc $|\sin(t) - \sin(0)| \leq 1 \times |t-0|$ i.e.

$$\boxed{|\sin(t)| \leq t}$$

Q2. Notons $\theta : t > 0 \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$. θ est continue sur $]0,+\infty[$ et bornée par 1 d'après la question précédente.
Soit $x > 0$. Alors, pour tout $t > 0$, $\left|\theta(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$. Mais $t \mapsto e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$. En effet, par limite usuelle, $t^2 e^{-tx} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ puisque $x > 0$. Ainsi, $e^{-tx} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), on a bien le résultat annoncé.
Finalement, $t \mapsto \theta(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $F(x)$ existe.
Ce raisonnement n'a utilisé que le fait que θ est continue sur $]0,+\infty[$ et bornée donc c'est également valable pour sin et cos ce qui donne bien finalement :

$$\boxed{\text{les fonctions } F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0,+\infty[}$$

Q3. On peut utiliser le théorème de converge dominée mais on peut aussi faire plus simple : soit $x > 0$. Comme on l'a vu à la question précédente, pour tout $t > 0$, $\left|\theta(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$. Ces fonctions de t sont intégrables sur $]0,+\infty[$ donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\theta(t)e^{-tx}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

Q4. Posons $f : (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$.

(a) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu dans **Q2**),

(b) pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$,

(c) pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(d) Pour tous $x, t > 0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\sin(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$$

Soit $a > 0$. Alors pour $t > 0$ et $x \geq a$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

en posant $\varphi : t > 0 \mapsto e^{-at}$. φ est positive, continue et intégrable (déjà vu) sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, par le théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et pour tout $x \geq a$,

$$\boxed{F'(x)} = \int_0^{+\infty} (-\sin(t))\, e^{-tx} dt = \boxed{-G(x)}$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et le résultat précédent est valable pour tout $x > 0$.

Q5. ► Soit $x > 0$. Alors

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(t)dt + i\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}e^{it}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}dt = \left[\frac{1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

En effet, si $t > 0$, $\left|\frac{1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right| = \frac{1}{|-x+i|}\left|e^{-xt}e^{it}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}e^{-xt} \to 0$ quand $t \to +\infty$ puisque $x > 0$. Il reste enfin à prendre partie réelle et partie imaginaire pour obtenir

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

► Soit $\alpha > 0$. Dans $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt$ on pose $u = \alpha t$ (changement de variable C^1 strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ puisque $\alpha > 0$). On obtient donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt} = \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{x}{\alpha}}\cos(u)\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2+1} = \boxed{\frac{x}{x^2+\alpha^2}}$$

Q6. On a vu que $F' = -G$. L'expression de G donne donc : pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\frac{1}{x^2+1} = -\arctan'(x)$. Comme $]0,+\infty[$ est un intervalle, il existe une constante réelle c telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = c - \arctan(x)$. Mais on a vu que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et on sait que $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En en déduit donc que $c = \frac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x > 0$,

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} \text{ donc } \boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$$

Partie II - Autour de la formule de Viète

Q7. **Attention, il y a une petite erreur d'énoncé** : il se peut que le dénominateur du membre de droite soit nul, ce qui arrive ssi $t = 0\,[2\pi]$.

Soit $t > 0$ *fixé* avec $t \neq 0\,[2\pi]$. Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: " $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(t/2^n\right)}}$ " est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

► **Initialisation** : $P(1)$ est vraie car le produit vaut $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et le membre de droite s'écrit via une formule trigonométrique bien connue :

$$\frac{\sin(t)}{2\sin\left(t/2\right)} = \frac{\sin(2\times t/2)}{2\sin\left(t/2\right)} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin\left(t/2\right)} = \cos(t/2)$$

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi avec la même formule trigo :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(t/2^n\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(2 \times t/2^{n+1}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin\left(t/2^{n+1}\right) \cos\left(t/2^{n+1}\right)} = \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin\left(t/2^{n+1}\right)}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Q8. Soit $t > 0$ *fixé*. Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: " $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)}$ "

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

▶ **Initialisation** : $P(1)$ est vraie car le produit vaut $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et le membre de droite aussi.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{4k-2}{2^{n+1}} t\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right)\right)$$

en utilisant la formule trigo rappelée dans l'énoncé. Tous les nombres impairs de $[\![1, 2^n - 1]\!]$ s'écrivant $4k-1$ ou (exclusif) $4k-3$ avec $k \in [\![1, 2^{n-2}]\!]$ on a bien

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right)$$

Q9. **Attention** : on a toujours le même problème avec t ...

Soit $t > 0$ tel que $t \neq 0\,[2\pi]$. **Q7** et **Q8** donnent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(t/2^n\right)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

t est fixé donc quand $n \to +\infty$, $\frac{t}{2^n} \to 0$ donc $\sin\left(t/2^n\right) \sim \frac{t}{2^n}$ donc $\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(t/2^n\right)} \to \frac{\sin(t)}{t}$ ce qui donne bien

$$\boxed{\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)}$$

▶ Essayons de résoudre le problème de $t = 0\,[2\pi]$. Pour $t \neq 0\,[2\pi]$,

$$\sin(t) = 2^n \sin\left(t/2^n\right) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

On a l'égalité sur $]0, +\infty[\backslash \{2p\pi, p \in \mathbb{N}^*\}$ de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ donc elle se prolonge à tout $]0, +\infty[$.
Soit $t > 0$ fixé. Quand $n \to +\infty$, $2^n \sin\left(t/2^n\right) \to t > 0$ donc on peut diviser à partir d'un certain rang et on a bien la limite demandée, sans restriction sur t.

Q10. Soit $x > 0$.

▶ La question précédente montre que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ sur $]0, +\infty[$.

▶ f et les f_n sont continues sur $]0, +\infty[$.

▶ Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il reste à assurer la domination : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right| e^{-tx} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} e^{-tx} = e^{-tx}$$

Rappelons que $x > 0$ est fixé. La fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est donc positive, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (et ne dépend pas de n). On a donc trouvé une fonction qui domine et le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = F(x)$$

Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt$ (c'est une somme finie) donc

$$\boxed{F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt}$$

Q11. On applique ce qui précède en $x = 1$. On a vu que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{2n}}{2^{2n} + (2k-1)^2} = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

en utilisant la question **Q5** pour le calcul des intégrales. On a donc bien montré que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}}$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{k^2 + (2^{n-1})^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(k/2^{n-1})^2 + 1}$$

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ qui est continue sur $[0, 1]$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(f) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ est une somme de Riemann pour f sur $[0, 1]$ donc elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. A fortiori, $R_{2^{n-1}} \to \dfrac{\pi}{4}$. Il reste juste à ajouter le terme pour $k = 0$ mais celui-ci vaut 1 et il est divisé par 2^{n-1} donc il ne modifie pas la limite. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}}$$

Q13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$:

$$\boxed{\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right|} = \left| \frac{(2k-1)^2 - 4k^2}{(4k^2 + 2^{2n})((2k-1)^2 + 2^{2n})} \right| = \left| \frac{1 - 4k}{(4k^2 + 2^{2n})((2k-1)^2 + 2^{2n})} \right|$$

$$\leq \frac{4k+1}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})} \leq \boxed{\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2+2^{2n}}}$$

puisque $(2k-1)^2+2^{2n} \geq 1+2^{2n}$ puisque $(2k-1)^2 \geq 1$ puisque c'est un entier naturel non nul.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) \right| \leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right|$$

$$\leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = 2^{n+1} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{4k^2+2^{2n}}}_{\leq \frac{1}{2^{2n}}} \leq 2^{n+1} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$= 2^{n+1} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \frac{2^{n-1}+1}{2^{2n}} \sim 2^{n+1} \frac{4\times 2^{n-1}}{2^{2n}} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

On a donc montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) = 0}$$

Comme on a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}}$$

PROBLÈME 2
Les matrices de Kac

Partie I - La dimension 3

Q15.

$$\boxed{\chi_A(X) = X(X^2-4) = X(X-2)(X+2)}$$

Q16. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}}$.
A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a 3 valeurs propres réelles distinctes donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres sont de dimension 1.

Q17.

$$\boxed{\chi_B(X) = X(X^2+4) = X(X-2i)(X+2i)}$$

$X(X^2+4)$ est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $X(X-2i)(X+2i)$ celle dans $\mathbb{C}[X]$.
De plus $i\chi_B(iX) = i^2X(i^2X^2+4) = -X(-X^2+4) = \chi_A(X)$. Donc :

$$\boxed{\chi_A(X) = i\chi_B(iX)}$$

Q18. Les valeurs propres de B sont les racines de χ_B donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}}$$

B n'a pas toutes ses valeurs propres réelles donc n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. 0 étant valeur propre d'ordre de multiplicité 1, le sous espace propre de 0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.
En revanche B est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui a 3 valeurs propres complexes distinctes donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et les sous espaces propres sont de dimension 1.

Q19.

$$\boxed{D^{-1}AD = -iB}$$

Q20.

$$\boxed{\Delta^{-1}A\Delta = S \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

S est une matrice symétrique réelle donc est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale R telles que $S = PRP^{-1}$. Ainsi $\Delta^{-1}A\Delta = PRP^{-1}$ donc

$$A = \Delta PRP^{-1}\Delta^{-1} = (\Delta P)R(\Delta P)^{-1}$$

A est donc semblable à la matrice diagonale R donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Q21. Prenons $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

Montrons par récurrence finie que $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = 0$.

Par hypothèse, nous avons : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

- Initialisation : En évaluant en $x = \dfrac{\pi}{2}$ l'expression au-dessus, on obtient $\lambda_0 = 0$.
- Hérédité : Supposons que pour un j fixé entre 0 et $n-1$, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ et montrons que $\lambda_{j+1} = 0$.

  On a donc : $\displaystyle\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

  Donc $\displaystyle\forall\, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + j\pi \ / \ j \in \mathbb{Z}\}, \quad \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^{k-j-1}(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

  En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $\pi/2$, on obtient $\lambda_{j+1} = 0$.
- Conclusion : On a donc montré que $\boxed{\text{la famille est } (f_0, f_1, \dots, f_n) \text{ est libre.}}$

  Par définition, c'est une famille génératrice de V_n donc c'est une base de V_n et

$$\boxed{V_n \text{ est un espace vectoriel de dimension } n+1.}$$

Q22.
- $f_0 = \sin^n$ et $f_0' = n \sin^{n-1} \cos = n f_1$.
- $f_n = \cos^n$ et $f_n' = -n \cos^{n-1} \sin = -n f_{n-1}$.
- Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f_k = \cos^k \sin^{n-k}$ et

$$f_k' = -k \cos^{k-1} \sin^{n-k+1} + (n-k) \cos^{k+1} \sin^{n-k-1} = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$$

Ces calculs prouvent donc que

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad f_k' \in V_n}$$

φ_n est clairement une application linéaire et par linéarité de la dérivation et les calculs précédents, la dérivée de tout élément de V_n appartient à V_n.

$$\boxed{\varphi_n \text{ est donc un endomorphisme de } V_n.}$$

De plus, les calculs montrent que la matrice B_n de φ_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ est

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Q23. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k} = (e^{ix})^k \ (e^{-ix})^{n-k} = e^{ikx} \ e^{-i(n-k)x} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x)$

Q24. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la question précédente et le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} g_k &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^j \ i^{k-j} \sin^{k-j} \right) \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cos^p \ (-i)^{n-k-p} \sin^{n-k-p} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p} \ (-1)^{n-k-p} \ i^{n-j-p} \ \cos^{j+p} \ \sin^{n-j-p} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{} p (-1)^{n-k-p} \ i^{n-j-p} \ f_{j+p} \end{aligned}$$

Comme $\quad 0 \leqslant j+p \leqslant k+n-k=n, \quad$ on a bien

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad g_k \in V_n}$$

Q25. On a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad g_k' = i(2k-n)g_k$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction g_k n'est pas la fonction nulle donc est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $i(2k-n)$. On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres complexes distinctes et on en déduit que $\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$ De plus

$$\boxed{Sp(\varphi_n) = \{i(2k-n) \ / \ k \in [\![0,n]\!]\} \quad \text{et} \quad SEP(i(2k-n)) = \mathrm{Vect}(g_k)}$$

Q26. L'endomorphisme φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de φ_n , c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{\text{n est impair}}$.

Q27. En reprenant le calcul de **Q24.**, on a

$$g_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} f_j$$

Comme $\quad \ker(\varphi_n - inId_{V_n}) = \mathrm{Vect}(g_n), \quad$ on en déduit bien que :

$$\boxed{\ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n+1$

Q28. Soit $\quad (k,l) \in [\![1,p]\!]^2. \quad$ On a , par définition du produit matriciel, et comme D est une matrice diagonale :

$$\boxed{(DM)_{kl} = \sum_{j=1}^{p} d_{kj} m_{jl} = d_{kk} m_{kl}}$$

$$\boxed{(MD)_{kl} = \sum_{j=1}^{p} m_{kj} d_{jl} = m_{kl} d_{ll}}$$

Q29. Soit $\quad (k,l) \in [\![1,n+1]\!]^2. \quad$ D'après **Q28.**,

$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{kl} = \frac{1}{d_{kk}} \ (A_n D_n)_{kl} = \frac{1}{d_{kk}} \ a_{kl} \ d_{ll} = i^{l-k} \ a_{kl}$$

- Pour $\quad k \in [\![1,n]\!], \quad$ on a :
$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{k,k+1} = ik = (-i)(-k)$$
- Pour $\quad k \in [\![2,n+1]\!], \quad$ on a :
$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{k,k-1} = -i(n-k+2)$$
- Dans tous les autres cas,
$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{kl} = 0$$

Ainsi on a prouvé :
$$D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$$
A_n et $D_n^{-1} A_n D_n$ sont deux matrices semblables donc ont même polynôme caractéristique. Donc

$$\chi_{A_n}(X) = \chi_{D_n^{-1}A_nD_n}(X) = \chi_{-iB_n}(X) = det(XI_{n+1}+iB_n) = det(-i(iXI_{n+1}-B_n)) = (-i)^{n+1}\, det(iXI_{n+1}-B_n)$$

Ainsi
$$\boxed{\chi_{A_n}(X) = (-i)^{n+1}\ \chi_{B_n}(iX)}$$

Q30. La matrice A_n est semblable à la matrice $-iB_n$. Comme la matrice B_n est diagonalisable de valeurs propres les $i(2k-n)$, on en déduit que la matrice A_n possède $n+1$ valeurs propres réelles distinctes égales aux $-i \times i(2k-n)$. Donc
$$\boxed{\mathrm{Sp}(A_n) = \{2k-n \ / \ k \in [\![0,n]\!]\}}$$
Il en découle que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que les sous espaces propres sont tous de dimension 1.
De plus, si X est un vecteur propre de B_n pour la valeur propre λ , alors
$$AD_nX = -iD_nB_nX = D_nX$$
Or D_n étant inversible, D_nX n'est pas le vecteur nul donc D_nX est vecteur propre de A_n pour la valeur propre $-i\lambda$. On en déduit que
$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}(D_nX) \quad \text{avec} \quad \ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}(X)$$

D'après **Q27.**, on peut choisir $\quad X = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad$ où $\quad \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}.$

Donc $\quad D_nX = \begin{pmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ \vdots \\ q'_n \end{pmatrix} \quad$ où $\quad \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad q'_k = i^{k-1}\ i^{n-k}\ \dbinom{n}{k} = i^{n-1}\ \dbinom{n}{k}.$

Le facteur i^{n-1} étant indépendant de k, on en déduit bien que

$$\boxed{\ker(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \dbinom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Q31. Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'étape k, l'urne U_1 contient 0, 1, 2, $\ldots$, n boules et ces "ou" sont exclusifs. Ainsi,

$$\boxed{(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n}) \text{ est un système complet d'événements}}$$

Q32. ► Si $j = 0$, il n'y a pas de boule dans l'urne U_1 donc la boule tirée le sera dans U_2 et passera dans U_1 de sorte que l'on aura $j = 1$ à l'étape suivante.
► Si $j = n$, toutes les boules sont dans l'urne U_1 donc la boule tirée passera dans U_2 et on aura $j = n-1$ à l'étape suivante.
► Si $j \in [\![1, n-1]\!]$ alors l'urne U_1 va recevoir ou perdre une boule donc $j = j \pm 1$.

$$\boxed{0 \to 1 \qquad n \to n-1 \qquad j \to j \pm 1}$$

Q33. ► Si $j = 0$. Le seul moyen de se retrouver sans boule dans l'urne U_1 à l'étape $k+1$ c'est qu'avant, il y en avait une seule ($l = 1$) et qu'elle a été tirée. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0 \text{ si } l \neq 1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}}$$

puisque si à l'étape k, U_1 contient une seule boule, il y a une chance sur n qu'elle soit choisie puisque l'on tire uniformément.

► Si $j = n$. Le seul moyen de se retrouver avec toutes les boules dans l'urne U_1 à l'étape $k+1$ c'est qu'avant, il y en avait $n-1$ ($l = n-1$) et que celle de U_2 a été tirée. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0 \text{ si } l \neq n-1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}}$$

► Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, puisque l'on peut avoir une boule en plus ou une boule en moins, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0$ si $l \neq j \pm 1$. Puis, si $l = j-1$, il faut tirer une boule de U_2 (qui en contient $n-(j-1) = n-j+1$) pour en ajouter une dans U_1 et ceci se fait avec probabilité $\dfrac{n-j+1}{n}$. De même, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0 \text{ si } l \neq j \pm 1 \quad \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{j+1}{n}}$$

Q34. ► Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \sum_{l=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})}_{=0 \text{ si } l \neq j \pm 1} \mathbb{P}(E_{k,l}) = \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

ce qui, avec la question précédente donne bien

$$\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1})}$$

Pareillement, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})}$$

Q35. La question précédente, interprétée avec les vecteurs Z_k donne $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$ et donc, par une récurrence immédiate,

$$\boxed{Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0}$$

Q36. Pour chaque boule j avec $j \in [\![1, n]\!]$, on note X_j la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si elle se trouve au départ dans U_1 et 0 sinon. Alors $N_0 = X_1 + \cdots + X_n$ (nombre total de boules dans U_1).

Comme on suppose que les affectations des boules se font indépendamment et équiprobablement, les X_j sont indépendantes et de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On sait alors que N_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ de sorte que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(N_0 = k) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$:

$$\boxed{\pi = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}}$$

Q37. D'après la question **Q30**, π est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n donc $\dfrac{1}{n} A_n \pi = \pi$. Mais on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$. Comme $Z_0 = \pi$, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \pi$ donc

$$\boxed{N_k \text{ a la même loi que } N_0}$$

Q38. Un sens vient d'être fait. Réciproquement, supposons qu'il existe π' une loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π', alors toutes les variables N_k suivent la loi π'.

On a donc $Z_0 = \pi'$ et $Z_1 = \pi'$ donc $\dfrac{1}{n}A_n\pi' = \pi'$ donc $\pi' \in \ker(A_n - nI_{n+1})$. D'après la question **Q30**, cet espace est de dimension 1 et engendré par π donc il existe un réel α tel que $\pi' = \alpha\pi$.

Mais π et π' sont des lois de probabilité donc la somme de leurs coordonnées vaut 1. On a donc

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \pi'_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha\pi_j = \alpha \sum_{j=0}^{n} \pi_j = \alpha$$

Ainsi, $\alpha = 1$ donc $\pi' = \pi$. On a donc bien montré que

$$\boxed{\pi \text{ est l'unique loi de probabilité telle que : si } N_0 \text{ suit la loi } \pi, \text{ alors toutes les variables } N_k \text{ suivent la loi } \pi}$$

FIN