

Exercice

1. Soit q la forme quadratique de \mathbb{R}^2 telle que $q(x, y) = 3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . M est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable, dont le polynôme caractéristique s'écrit $\lambda^2 - 16\lambda - 36 = (\lambda + 2)(\lambda - 18)$. M a donc deux valeurs propres 18 et -2 .

Donc il existe une base orthonormale (\vec{I}, \vec{J}) de \mathbb{R}^2 , formée de vecteurs propres de M , dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

L'équation de \mathcal{H} dans (O, \vec{I}, \vec{J}) est donc $q(\overrightarrow{OM}) = 2$, soit $18X^2 - 2Y^2 = 2$.

2. $\mathcal{H} : \frac{X^2}{(\frac{1}{3})^2} - Y^2 = 1$ est l'équation réduite d'une hyperbole de centre O , d'axe focal (O, \vec{I}) .

Si on pose $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, et l'excentricité de \mathcal{H} est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$.

3. \mathcal{C} est le cercle de centre O de rayon 1, donc dans (O, \vec{I}, \vec{J}) , son équation est $OM^2 = 1$, soit $X^2 + Y^2 = 1$.

4. Les points communs aux deux courbes vérifient le système $\begin{cases} 18X^2 - 2Y^2 = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} X^2 = \frac{1}{5} \\ Y^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$.

Les quatre points obtenus ont donc pour coordonnées dans (O, \vec{I}, \vec{J}) :

$A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ et $D\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc $ABCD$ est un rectangle d'aire $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}$.

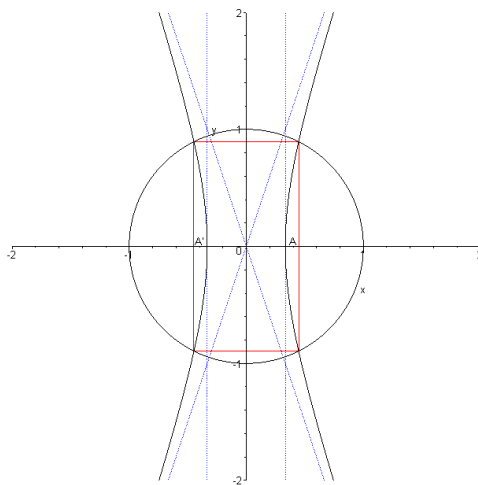
6. Dans (O, \vec{I}, \vec{J}) :

Les sommets de \mathcal{H} ont pour coordonnées $(\pm a, 0)$, donc $A'(-\frac{1}{3}, 0)$ et $A(\frac{1}{3}, 0)$.

Les asymptotes de \mathcal{H} ont pour équation: $Y = \pm \frac{b}{a}X$, donc $D' : Y = -3X$ et $D : Y = 3X$.

Les tangentes aux sommets de \mathcal{H} ont pour équation: $X = \pm a$, donc $T' : X = -\frac{1}{3}$ et $T : X = \frac{1}{3}$.

7. Représentation graphique:



Problème

Partie A

Un exemple en dimension 3

1. (R) peut s'écrire sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Les coefficients des 3 vecteurs-colonnes de A sont positifs et $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$, donc la matrice A est stochastique.
3. Programme dans le langage de MAPLE qui calcule le vecteur colonne X_n à partir des données: la matrice A , l'entier positif n et le vecteur initial X_0 .

```
> X:=proc(A::matrix,n::posint,X0::vector)
> local k,V;
> V:=X0;
> for k to n do
> V:=evalm(A&*V)
> end do;
> end proc;
```

```
X := proc(A::matrix, n::posint, X0::vector)
local k, V;
    V := X0; for k to n do V := evalm('&*'(A, V)) end do
end proc
```

```
> A:=matrix([[7/10,2/5,1/2],[3/10,0,1/10],[0,3/5,2/5]]):
> X0:=vector([0.5,0.5,0]):
> X(A,2010,X0);
```

[0.5999999998, 0.2000000000, 0.2000000000]

4. $\text{Tr}(A) = \frac{11}{10}$ et $\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{10} \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{10} \left(\frac{4}{25} - \frac{4}{25} \right) = 0$, donc A n'est pas inversible.

5. ${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui montre que le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice tA associé à la valeur propre 1.

6.

(a) Le polynôme caractéristique de M s'écrit $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \det({}^t(M - \lambda I_3))$, puisque deux matrices transposées ont le même déterminant. Il en découle $\chi_M(\lambda) = \det({}^tM - \lambda I_3) = \chi_{{}^tM}(\lambda)$, donc M et tM ont le même polynôme caractéristique.

(b) χ_M est un polynôme du troisième degré à coefficients dans \mathbb{R} , il admet 3 racines complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, éventuellement non distinctes et dont l'une au moins est réelle.

Dans $\mathbb{C}[\lambda]$, χ_M se factorise sous la forme $\chi_M(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. On sait d'après le cours que le coefficient de λ^2 dans $\chi_M(\lambda)$ est égal à la trace de M ; il est aussi égal à $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ en développant ce produit de facteurs. Donc $\text{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

7. D'après 4., A n'est pas inversible donc $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de A .

D'après 6., A et tA ont les mêmes valeurs propres et on a vu au 5. que $\lambda_2 = 1$ était valeur propre de tA , donc aussi valeur propre de A .

De plus $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A) = \frac{11}{10}$, ce qui implique que $\lambda_3 = \frac{1}{10}$.

Conclusion: les valeurs propres de A sont 0, 1, et $\frac{1}{10}$.

8. Déterminons les sous-espaces propres associés:

$$X(x, y, z) \in \text{Ker}(A - I_3) \text{ s.si } \begin{cases} -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{10}x - y + \frac{1}{10}z = 0 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}z = 0 \end{cases} \text{ s.si } \begin{cases} x = 3y \\ y = z \end{cases}.$$

Donc $\text{Ker}(A - I_3)$ est la droite vectorielle de \mathbb{R}^3 engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$X(x, y, z) \in \text{Ker}(A - \frac{1}{10}I_3) \text{ s.si } \begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{10}z = 0 \\ \frac{3}{5}y + \frac{3}{10}z = 0 \end{cases} \text{ s.si } \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}.$$

Donc $\text{Ker}(A - \frac{1}{10}I_3)$ est la droite vectorielle de \mathbb{R}^3 engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc on trouve $a = 1$.

$$X(x, y, z) \in \text{Ker}(A) \text{ s.si } \begin{cases} \frac{7}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}z = 0 \\ \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z = 0 \end{cases} \text{ s.si } \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ z = -\frac{3}{2}y \end{cases}.$$

Donc $\text{Ker}(A)$ est la droite vectorielle de \mathbb{R}^3 engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc on trouve $b = -3$.

Les 3 valeurs propres étant deux à deux distinctes, A est diagonalisable sur \mathbb{R} : on peut donc écrire $A = PDP^{-1}$,

avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$9. \begin{cases} 3x + y + z = x' \\ x + y + 2z = y' \\ x - 2y - 3z = z' \end{cases} \text{ s.si } \begin{cases} x = \frac{1}{5}(x' + y' + z') \\ x + y + 2z = y' \\ x - 2y - 3z = z' \end{cases} \text{ s.si } \begin{cases} x = \frac{1}{5}(x' + y' + z') \\ y = \frac{1}{5}(5x' - 10y' - 5z') \\ z = \frac{1}{5}(-3x' + 7y' + 2z') \end{cases}, \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

10. Pour $n = 0$, $X_0 = PI_3P^{-1}X_0$, donc la proposition est vraie.

Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n = PD^nP^{-1}X_0$, alors $X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$, ce qui montre que la proposition est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

11.

(a)
$$X_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2} \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{20}$, donc $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n} > 0$ et $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n} > 0$.

De plus $\frac{1}{5} + \frac{1}{10^n} > 0$ et la somme des trois coefficients de X_n vaut 1, donc le vecteur-colonne X_n est stochastique.

12. La suite de terme général $\frac{1}{10^n}$ a pour limite 0 en $+\infty$. Donc:

$x_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n}$ a pour limite $l_x = \frac{3}{5}$, $y_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10^n}$ a pour limite $l_y = \frac{1}{5}$, et $z_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{10^n}$ a pour limite $l_z = \frac{1}{5}$.

13. $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ est stochastique car ses trois coefficients sont positifs et de somme égale à 1.

Partie B

Cas de la dimension 2

1. Comme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est stochastique, on a $a \geq 0$, $c \geq 0$, $a + c = 1$, donc $(a, c) \in [0, 1]^2$ avec $c = 1 - a$.

De même $(b, d) \in [0, 1]^2$ avec $d = 1 - b$, donc il existe bien $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}$.

2. La proposition est vraie à l'ordre 0 car X_0 est stochastique par hypothèse.

Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, le vecteur-colonne X_n soit stochastique, donc que $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$, $x_n + y_n = 1$.

Alors $X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1 - a)x_n + (1 - b)y_n \end{pmatrix}$.

Comme a, b, x_n, y_n sont positifs, $ax_n + by_n \geq 0$. D'autre part, comme $a \leq 1$ et $b \leq 1$, on a $1 - a$ et $1 - b$ positifs et comme x_n, y_n sont positifs, $(1 - a)x_n + (1 - b)y_n \geq 0$. De plus, $ax_n + by_n + (1 - a)x_n + (1 - b)y_n = x_n + y_n = 1$, donc le vecteur-colonne X_{n+1} est stochastique et la proposition est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion: la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $\text{Tr}(A) = a + 1 - b$. Comme $a \geq 0$ et $b \leq 1$, alors $1 - b \geq 0$, donc $\text{Tr}(A) \geq 0$.

Comme $a \leq 1$ et $b \geq 0$, alors $1 - b \leq 1$, donc $\text{Tr}(A) \leq 2$. Finalement, $0 \leq \text{Tr}(A) \leq 2$.

4.

(a) On suppose $\text{Tr}(A) = 0$, soit $b = a + 1$, donc $A = \begin{pmatrix} a & a + 1 \\ 1 - a & -a \end{pmatrix}$.

A est stochastique, ce qui implique que ses coefficients sont positifs, en particulier $a \geq 0$ et $-a \geq 0$, donc $a = 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en découle $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = (A^2)^p = I_2$ et $A^{2p+1} = (A^2)^p A = A$, donc

$$X_{2p} = A^{2p} X_0 = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ et } X_{2p+1} = A^{2p+1} X_0 = AX_0 = X_1 = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

La suite (X_n) est de période 2.

(b) On suppose $\text{Tr}(A) = 2$, soit $b = a - 1$, donc $A = \begin{pmatrix} a & a - 1 \\ 1 - a & 2 - a \end{pmatrix}$.

A est stochastique, ce qui implique que ses coefficients sont positifs, en particulier $a - 1 \geq 0$ et $1 - a \geq 0$, donc

$$a = 1 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Il en découle pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I_2$ et $X_n = A^n X_0 = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. La suite (X_n) est constante.

On suppose désormais que $0 < \text{Tr}(A) < 2$.

5. On a donc $0 < a + 1 - b < 2$, ainsi $-1 < a - b < 1$.

6. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) $AV = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ -a+b \end{pmatrix} = (a-b)V$, donc le vecteur-colonne V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $q = a - b$.

(b) $|q| = |a - b| < 1$, car d'après 5., $-1 < a - b < 1$.

7. Le polynôme caractéristique de A s'écrit: $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (b-a-1)\lambda + a-b = (\lambda-1)(\lambda-a+b)$, donc il a deux racines réelles 1 et $q = a - b$.

1 est donc valeur propre de A .

8. $q = a - b < 1$, donc les deux valeurs propres de A sont distinctes et A est diagonalisable.

9. Si un tel vecteur-colonne L existe, il doit vérifier $AL = L$, donc L doit être un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

On doit aussi avoir $X_0 = L + \lambda V$, ce qui implique:

$X_1 = AX_0 = AL + \lambda AV = L + \lambda(a-b)V = X_0 - \lambda V + \lambda(a-b)V = X_0 + \lambda(a-b-1)V$, donc $X_1 - X_0 = \lambda(a-b-1)V$.

Comme $X_1 - X_0 = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 - x_0 \\ (1-a)x_0 + (1-b)y_0 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)x_0 + by_0 \\ (1-a)x_0 - by_0 \end{pmatrix} = ((a-1)x_0 + by_0)V$, ceci est possible

s.si $\lambda = \frac{(a-1)x_0 + by_0}{a-b-1}$, ce qui a bien un sens puisque $-2 < a-b-1 < 0$.

Posons donc $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = X_0 - \lambda V$, avec $\lambda = \frac{(a-1)x_0 + by_0}{a-b-1}$. On a bien $AL = AX_0 - \lambda AV = X_1 - \lambda(a-b)V = X_0 + ((a-1)x_0 + by_0)V - \lambda(a-b)V = X_0 + \lambda(a-b-1)V - \lambda(a-b)V = X_0 - \lambda V = L$ et $X_0 = L + \lambda V$.

10. La proposition est vraie à l'ordre 0 car $X_0 = L + \lambda V$.

Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n = L + q^n \lambda V$. Alors $X_{n+1} = AX_n = AL + q^n \lambda AV = L + q^n \lambda(a-b)V = L + q^{n+1} \lambda V$ car $q = a - b$. La proposition est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion: la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Comme $|q| < 1$, la limite de q^n est nulle en $+\infty$. Donc la limite du vecteur-colonne X_n est $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$, ce qui signifie que la suite (x_n) converge vers l_x et la suite (y_n) converge vers l_y .

12. D'après B.2. le vecteur-colonne X_n est stochastique, donc $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$. En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans les relations précédentes, on obtient $l_x \geq 0$, $l_y \geq 0$ et $l_x + l_y = 1$, ce qui signifie que le vecteur-colonne L est stochastique.

13. Soit T un vecteur-colonne stochastique de \mathbb{R}^2 tel que $AT = T$, donc T appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1. Cet espace est de dimension 1 et contient L d'après la question 9, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $T = kL$. D'où $T = \begin{pmatrix} kl_x \\ kl_y \end{pmatrix}$.

Comme T est stochastique, $kl_x + kl_y = k(l_x + l_y) = 1$, donc $k = 1$ puisque $l_x + l_y = 1$. On a donc $T = L$.

Partie C

Un cas particulier

On suppose que A est non inversible donc $\det(A) = a(1-b) - b(1-a) = a-b=0$, et $a=b$.

1. Ainsi $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ a ses deux vecteurs colonnes identiques et non nuls, donc ils engendrent un sous-espace de dimension 1 de \mathbb{R}^2 , ce qui signifie que le rang de A est 1.

2. Si on pose $\alpha = a$, mais pourquoi changer de notation?, on obtient $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in [0, 1]$.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha(1-\alpha) & \alpha^2 + \alpha(1-\alpha) \\ \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 & \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = A$.

4. Il en découle $A^3 = A^2 = A$ et par récurrence $A^n = A$ pour $n \geq 2$, ce qui est vrai aussi pour $n = 1$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0 = AX_0$.

5. $A^2 = A$ se traduit pour f par $f \circ f = f$, donc f est un projecteur de E .

6. $X(x, y) \in \text{Ker } f$ s.si $\begin{cases} \alpha x + \alpha y = 0 \\ (1-\alpha)x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$ s.si $x + y = 0$ (puisque $(\alpha, 1-\alpha) \neq (0, 0)$).

Le noyau de f est donc la droite vectorielle de E d'équation $x + y = 0$ dans \mathcal{B} .

f étant un projecteur, $\text{Im } f$ est l'ensemble des vecteurs de E invariants par f , donc:

$X(x, y) \in \text{Im } f$ s.si $\begin{cases} \alpha x + \alpha y = x \\ (1-\alpha)x + (1-\alpha)y = y \end{cases}$ s.si $\begin{cases} (\alpha-1)x + \alpha y = 0 \\ (1-\alpha)x - \alpha y = 0 \end{cases}$ s.si $(\alpha-1)x + \alpha y = 0$.

L'image de f est donc la droite vectorielle de E d'équation $(\alpha-1)x + \alpha y = 0$ dans \mathcal{B} .

7. f est une projection orthogonale s.si les deux sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux, donc s.si $1 \cdot (\alpha-1) + 1 \cdot \alpha = 0$ s.si $\alpha = \frac{1}{2}$.

8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Alors $f(\vec{u}(\theta)) = (\alpha \cos \theta + \alpha \sin \theta, (1-\alpha) \cos \theta + (1-\alpha) \sin \theta)$, donc $f(\vec{u}(\theta)) = (\cos \theta + \sin \theta)(\alpha \vec{i} + (1-\alpha) \vec{j})$.

Alors $\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = (\cos \theta + \sin \theta)^2 (\alpha^2 + (1-\alpha)^2) = (\cos \theta + \sin \theta)^2 (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) = \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 (4\alpha^2 - 4\alpha + 2) = ((2\alpha - 1)^2 + 1) (\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4})^2 = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4})$.

9. En prenant $\theta = 0$, on obtient $\vec{u}(\theta) = \vec{i}$ et 8. donne: $\|f(\vec{i})\|^2 = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$.

Comme \vec{i} est de norme 1, il vient: $\frac{\|f(\vec{i})\|}{\|\vec{i}\|} = \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}$.

En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\vec{u}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et 8. donne:

$\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|^2}{\|\vec{i} + \vec{j}\|^2} = \frac{\|f(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}))\|^2}{\|\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})\|^2} = \frac{\|f(\vec{u}(\frac{\pi}{4}))\|^2}{\|\vec{u}(\frac{\pi}{4})\|^2} = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 2(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)$.

Donc $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|} = \sqrt{2} \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}$.

10. Supposons que f soit une projection orthogonale, alors $\alpha = \frac{1}{2}$ d'après 7. Soit $\vec{x} \in E$. Alors:

Si $\vec{x} = 0_E$, on a l'égalité $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = 0$.

Si $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} \neq 0_E$, $\frac{\|f(\vec{x})\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\|f(\frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}})\|^2}{\|\frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\|^2} = \frac{\|f(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})\|^2}{\|\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}\|^2}$, avec $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

d'où d'après 8: $\frac{\|f(\vec{x})\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4})$ puisque $\alpha = \frac{1}{2}$.

On obtient donc $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| |\sin(\theta + \frac{\pi}{4})| \leq \|\vec{x}\|$.

Conclusion: si f est une projection orthogonale, alors $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

Supposons que $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

Alors en particulier $\|f(\vec{i} + \vec{j})\| \leq \|\vec{i} + \vec{j}\|$ d'où $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|} = \sqrt{2}\sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \leq 1$. Il en découle $2(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) \leq 1$,

$2\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{2} \leq 0$, ce qui s'écrit encore $\frac{(2\alpha-1)^2}{2} \leq 0$, qui implique que $\alpha = \frac{1}{2}$. D'après 7., f est donc une projection orthogonale.

On a prouvé l'équivalence des 2 propositions.

***** FIN *****

corrigé par A. LE STANG
professeur de CPGE TSI 2ème année
Lycée Saint-Joseph LaSalle, LORIENT
